Aspecte generale din teoria erorilor

Asist. drd. Alexandra Fortiş
Universitatea "Tibiscus", Timişoara

ABSTRACT. The theory of errors is concerned with the expression of the influence of one or more error sources to which computed or observed quantities are subjected. Also, it is trying to establish a relation between the magnitude of an error and the probability of its occurrence. In this article, we are briefly presenting the main characteristics for the random error and the systematic error and we are introducing some aspects of the error propagation theory.
Key words: error analysis, random error, systematic error, error propagation

1 Consideraţii teoretice

O ramură importantă a matematicii o constituie calculul numeric care, pe lângă faptul că tratează procesul prin care problemele matematice se pot rezolva prin intermediul operaţiilor aritmetice, se ocupă şi cu alegerea acelui procedeu de rezolvare care se potriveşte cel mai bine soluţiei unei probleme particulare. Unul dintre principalele scopuri ale calculului numeric este de a furniza procedee exacte pentru rezultatele calculelor.

Erorile conţinute în răspunsul numeric la o anumită problemă pot proveni, în general, din două surse. Este vorba, în primul rând, despre erori inerente care apar în formularea matematică a problemei, aici putând fi încadrate

1. erorile produse atunci când formularea matematică a unei probleme este doar o aproximare a situaţiei fizice;
2. erorile datorate inexactităţii datelor fizice.

Acest tip de erori nu poate fi controlat prin intermediul calculelor iar valoarea erorilor este, în general, neglijabilă. Totuşi, valoarea unei soluţii calculate se poate exprima numai după ce a fost analizată cu atenţie acest tip de eroare.

În al doilea rând se poate vorbi despre erori produse în timpul procesului de calcul numeric, putând fi vorba despre

1. greşeli de programare
2. erori de trunchiere, adică evaluarea inexactă a operatorilor matematici
3. erori de rotunjire sau, altfel, spus, calcule aritmetice inexacte.

Greşelile de programare pot fi detectate şi verificate. Însă ultimele două surse de erori computaţionale sunt cele care interesează cel mai mult şi pentru analiza şi controlul lor se elaborează diferiţi algoritmi.

Atunci când se lucrează cu vectori, matrice şi funcţii, problema măsurării exactităţii unei anumite cantităţi se realizează prin intermediul normelor. Vom enumera, în cele ce urmează, diferite tipuri de norme, mai des utilizate în practică pentru măsurarea erorilor

1. în cazul vectorilor din spaţiul R^n cele mai utilizate sunt
   - norma L_p: pentru $p \geq 1, \|v\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right]^{1/p}$
   - norma L_∞: $\|v\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |v_i|$
   - norma L_p ponderată: pentru $w_i \geq 0$ dat şi pentru $p \geq 1, \|v\|_{p,w} = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |v_i|^p\right]^{1/p}$
2. pentru funcţiile continue pe un interval stabilit $[a,b]$ se definesc
   - norma L_p: pentru $p \geq 1, \|f\|_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}$
   - norma uniformă: $\|f\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |f(x)|$
3. pentru matricile de forma $n \times m$ cu elemente reale definim
   - norma indusă: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1, x \in R^n} \|Ax\|$
   - norma Frobenius: $\|A\|_F = \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2\right]^{1/2}$.

2 Erori aleatoare şi erori sistematice

Teoria valorii reale reprezintă un model simplu pentru măsurare dar este posibil să nu fie întotdeauna o reflectare corectă a realităţii. În particular, se presupune că orice observaţie este compusă din valoarea reală la care se adaugă o anumită valoare a unei erori întâmplătoare. Se ridică întrebarea dacă acest fapt este rezonabil, problema fiind dacă erorile ce afectează o măsurătoare sunt în totalitate întâmplătoare.

Un mod de a trata această noţiune este să revizuim modelul simplu prin divizarea componentei pentru eroare în două subcomponente: **eroarea aleatoare** şi **eroarea sistematică**. În cele ce urmează vom insista asupra diferenţelor dintre aceste două tipuri de erori şi vom încerca să diagnosticăm efectele lor.

Erorile aleatoare (accidentale) afectează precizia datelor şi nu sunt corelate. Motivele producerii acestor erori sunt numeroase şi, în general, necunoscute şi afectează în mod diferit fiecare măsurătoare în parte. Se consideră că aceste erori sunt realizări ale unei variabile aleatoare normale.

O caracteristică foarte importantă a acestor erori este aceea că nu prezintă un efect consistent asupra setului de date, valorile observate fiind distribuite la stânga şi la dreapta valorilor reale, în mod aleator. Acest lucru este echivalent cu a spune că, dacă am privi toate erorile aleatoare sub forma unei distribuţii, suma lor ar trebui să fie nulă, adică să existe tot atâtea valori negative cât şi pozitive.

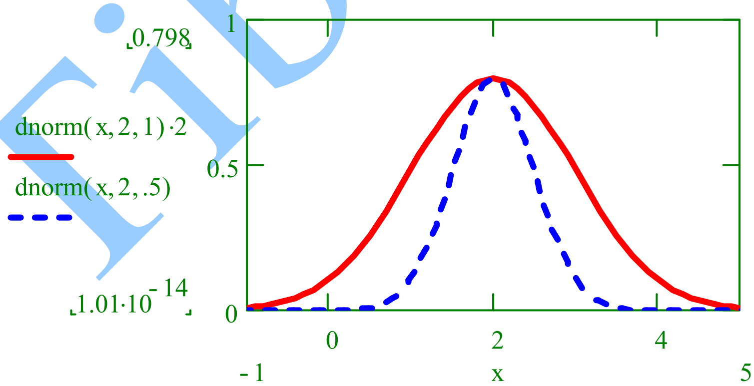

Figura 2.1

Proprietatea principală a acestor erori aleatoare este aceea că dau un caracter de variabilitate seriei de date analizate însă nu afectează performanţele medii ale acesteia.

În figura 2.1, realizată prin intermediul instrumentelor grafice disponibile în MathCAD cu linia punctată a fost trasată o distribuţie a unei variabile neafectate de nici o eroare aleatoare, în timp ce linia continuă conține şi eroarea aleatoare.

Fiind inevitabile, este necesar să estimăm importanța lor, înainte de a le lua în calcul, pentru a se putea evalua gradul de incertitudine al rezultatului final. În măsura în care este posibil, va trebui preferată o tehnică de măsurare care induce erorile aleatoare cele mai mici.

Erorile sistematice afectează fiabilitatea datelor şi sunt total corelate. În cazul în care s-ar face presupunerea că măsurile nu sunt afectate de nici o eroare aleatoare, diferența dintre valoarea reală şi cea măsurată, în cazul în care există, se va datora unei erori sistematice. Originea erorilor sistematice se datorează, cel mai des, calibrării imperfecte a aparatelor de măsură sau unor fenomene exterioare care perturbă procesul de măsurare.

Spre deosebire de erorile aleatoare, erorile sistematice tind să fie, în mod consistent, fie pozitive, fie negative şi din această cauză se poate menționa faptul că afectează rezultatul final.

Într-o reprezentare grafică (figura 2.2) similară celei de mai sus, se poate remarca faptul că eroarea sistematică influențează media valorilor măsurate, linia continuă fiind utilizată pentru datele neafectate de erori iar graficul trasat cu linie punctată conținând date afectate de erori sistematice.

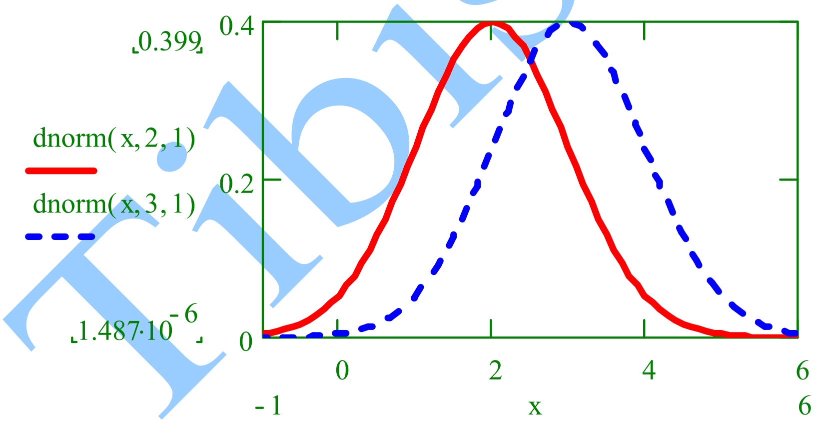

Figura 2.2

Se pune problema reducerii erorilor de măsurare, atât aleatoare cât şi sistematice. Primul lucru care se poate realiza este efectuarea de teste asupra instrumentelor folosite pentru măsurare pentru a stabili informații despre efectele mediului de lucru asupra performanței lor. De asemenea, este necesar ca cei care efectuează diferitele măsurători să fie bine instruiți în domeniu, pentru ca rezultatele furnizate de ei să nu fie afectate de erori voluntare sau involuntare.

Atunci când datele sunt colectate pentru un studiu, este necesar ca ele să fie reverificate, de preferința de către computer, pentru a se evita greşeli de tastare care ar produce alte răspunsuri finale decât cele aşteptate. De asemenea, se recomandă utilizarea de procedee statistice pentru ajustarea erorilor de măsurare.

În fine, una dintre cele mai recomandate metode de reducere a erorilor, în special a celor sistematice, este utilizarea unor măsurători multiple pentru acelaşi fenomen. În cazul în care diferitele seturi de măsurători nu prezintă aceleaşi erori sistematice, analistul va fi capabil să efectueze "jonglerii" printre aceste măsurători multiple pentru a obține informații corecte despre ceea ce se petrece în realitate.

3 Erorile în statistică

Alcătuirea unei serii de valori care să constituie un eşantion în sensul statistic al termenului este un proces îndelungat, presărat de dificultăți şi în cursul căruia pot să apară numeroase erori, de naturi diferite. Erorile pot să se producă în fiecare dintre cele patru faze ale derulării clasice a operațiilor, şi anume: măsurarea, transmisia informației, stocarea informației şi analizarea informației. Prin urmare, înainte de utilizarea une serii de date, este necesară o studiere a calității şi reprezentativității acestora, studiu realizabil prin implementarea diferitelor tehnici de tip statitic şi grafic.

În funcție de natura erorilor constatate sau presupuse, cercetarea face apel la diferite tehnici şi metode. Printre acestea se numără

- metode care constă în verificarea, pe loc, a modului în care datele au fost organizate, tratate şi/sau transformate;
- investigații de birou în care se verifică fiecare etapă din lanțul de tratament aplicat datelor, începând de la elaborarea sa, precum şi modul în care au fost alcătuite seriile de date care sunt supuse controlului;
- investigații statistice care, prin intermediul instrumentelor specifice, permit punerea în evidență a anumitor erori sau inconsistențe. Aceste tehnici sunt deosebit de eficiente, se utilizează frecvent în practică şi se bazează pe ipoteze specifice care trebuie cunoscute foarte bine.

În continuare vom expune câteva considerente legate de ipotezele analizelor statistice. Este utilă precizarea faptului că toate calculele statistice se bazează pe un anumit număr de ipoteze care, în principiu, ar trebui verificate. Printre acestea se numără faptul că

- măsurile reflectă valorile reale, ipoteză care nu se realizează niciodată în practică, din cauza arorilor aleatoare sau sistematice
- datele sunt consistente adică, în timpul perioadei de observație, nu intervine nici o modificare a condițiilor interne ale sistemului analizat;
- seria de date este staționară, proprietățile legii statistice care guvernează fenomenul analizat fiind invariante de-a lungul timpului;
- datele sunt omogene, neomogenitatea rezultând din faptul că
  - datele provin din măsurarea unui fenomen ale cărui caracteristici evoluează în perioada de timp în care se efectuează măsurarea, fiind vorba despre un fenomen nestaționar;
  - datele reflectă două sau mai multe fenomene diferite;
- seria de date este aleatoare şi simplă, aceste caracteristici constituind o ipoteză fundamentală pentru analiza statistică;
- seria de date trebuie să fie suficient de mare, acest fapt având o mare influență asupra erorilor de eşantionare.

4 Analiza propagării erorilor

Pe scurt, este vorba despre modul în care erori de măsurare relativ mici pot cauza erori computaționale semnificative.

Erorile sistematice sunt cumulative prin natura lor. Ele pot fi modelate prin intermediul funcţiilor matematice şi, odată calculată valoarea lor, aceste erori pot fi corectate. Este de menționat faptul că apariția acestor erori este inevitabilă şi, prin urmare, valorile afectate de erori sistematice trebuie eliminate din seturile de date, înainte de a se efectua vreo ajustare a datelor.

Erorile aleatoare, pe de altă parte, nu pot fi descrise printr-un model matematic prestabilit, ele urmând legile probabilităților. Dacă un experiment este repetat de suficient de multe ori, erorile aleatoare vor avea tendința de a se anula unele pe altele. Orice tip de măsurătoare conține erori aleatoare, indiferent de precizia cu care este efectuată. Aceste erori pot fi estimate şi contabilizate prin intermediul tehnicilor de ajustare cu metoda celor mai mici pătrate.

După unii autori, o a treia clasă de erori ar fi greşelile dar, din punct de vedere tehnic, nu este vorba despre erori în sensul abordat în această lucrare. Aceste valori trebuie izolate şi înlăturate din setul de date care este supus unui anumit tip de analiză, înainte de a se efectua vreo operaţie de ajustare a datelor.

Un alt set important de concepte care intervin în măsurarea erorilor este alcătuit din acurateţe şi precizie. Acurateţea desemnează apropierea dintre o valoare măsurată şi valoarea adevărată, în timp ce precizia indică apropierea dintre valorile unor măsurători repetate. O măsurătoare poate fi corectă, fără să fie precisă şi reciproc. O observare corectă a rezultatelor va menţine un raport constant între acurateţe şi precizie.

De foarte multe ori, în practică, observatorii nu pot măsura cantitatea pe care doresc să o examineze şi, în acest caz, sunt necesare măsurători efectuate asupra unor mărimi care să le permită să ajungă, în final, la rezultatele dorite. Eroarea care apare în acest caz pentru valorile calculate este o funcţie depinzând de erorile valorilor măsurate şi este evaluată prin analiza propagări erorilor.

Legea generală a propagării erorilor pentru o funcţie depinzând de n variabile este dată de următoarea relaţie

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}$$

Derivata parţială $\partial y/\partial x_n$ indică schimbarea valoarii calculate y relativ la valoarea măsurată x_n iar σ_{x_n} indică eroarea standard atribuită valorii măsurate.

În cazul ideal în care toate erorile sistematice au fost corectate înainte de începerea efectuării calculelor, doar erorile aleatoare se vor propaga. Într-un astfel de caz, drept erori standard care ar afecta valorile măsurate se consideră specificaţiile de precizie care însoţesc diferitele echipamente de măsurare.

Un algoritm poate fi descris, pe scurt, ca fiind o funcţie $y = \varphi(x)$, $\varphi : D \subset R^n \to R^n$ şi toate funcţiile componente φ_i au derivata de ordinul întâi continuă. Vom considera $\bar{x}$ o aproximaţie pentru x şi definim $\bar{y} = \varphi a(\bar{x})$. Erorile absolute se vor obţine prin relaţiile $\Delta y = \bar{y} - y$ şi, respectiv, $\Delta x = \bar{x} - x$. Utilizând o dezvoltare în serie Taylor şi neglijând termenii de ordin mare, vom obţine formula de aproximare

$$\Delta y \approx D\varphi(x)\Delta x,$$

unde $D\varphi(x)$ este matricea jacobiană de forma

$$D\varphi(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

În mod similar, eroarea relativă $\varepsilon_{y_i} = \Delta y_i / y_i$ este legată de $\varepsilon_{x_i} = \Delta x_i / x_i$ prin intermediul formulei

$$\varepsilon_{y_i} \approx \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{\varphi_i(x)} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \varepsilon_{x_j}$$

Uneori este convenabil să se utilizeze înlocuirea

$$\frac{\|\varphi(\bar{x}) - \varphi(x)\|}{\|\varphi(x)\|} \le c \frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|}$$

unde c poartă numele de număr de condiționare.

Orice operație dintr-un proces computațional poate produce o eroare care, odată ce a fost generată, poate fi amplificată sau redusă prin operațiile care urmează. Unul dintre cele mai fecvente - şi deseori evitabile - moduri de mărire a importanței unei erori poartă numele de pierdere a zecimalelor semnificative. O astfel de pierdere poate fi evitată prin anticiparea producerii sale. Rezultatele operațiilor vor fi exacte cu o precizie stabilită dinainte, care să indice numărul de zecimale care vor fi luate în considerare.

Odată ce o eroare s-a produs, este evident că va afecta toate rezultatele următoare. Această propagare a erorilor de-a lungul calculelor este studiată prin intermediul a doi termeni: **condiționare** şi **instabilitate**.

Condiționarea este utilizată pentru a descrie sensibilitatea valorii funcției studiate la schimbările argumentului şi este măsurată, de obicei, prin schimbarea relativă maximă a valorii funcției, cauzată de schimbarea relativă a argumentului. Trebuie menționat faptul că, cu cât numărul de condiționare este mai mare, cu atât funcția este mai prost condiționată.

Noțiunea de instabilitate descrie sensibilitatea unui proces numeric de calculare a valorii unei funcții față de erorile de rotunjire care apar, în mod inevitabil, de-a lungul execuției. Efectul exact al acestor erori asupra preciziei unei valori calculate este destul de dificil de determinat. Este posibil, însă, să se estimeze efectele prin considerarea individuală a erorilor de rotunjire, pentru fiecare pas al procesului computațional.

Vom încheia această lucrare prin enumerarea metodelor computaționale pentru estimarea erorilor.

- **Precizia dublă** este cea mai simplă metodă, problema rezolvându-se mai întâi prin precizie simplă şi apoi în precizie dublă iar cu diferența dintre cele două rezultate se obține un estimator al erorii de rotunjire. Metoda nu este avantajoasă din punct de vedere al timpului de execuție, dubla precizie mărind timpul de execuție cu factorul 8.
- **Aritmetica intervalelor** presupune exprimarea fiecărui număr prin intermediul unei valori minime şi al unei valori maxime, la fiecare pas al algoritmului de rezolvare obținându-se două valori, una minimă şi una maximă iar valoarea reală fiind în mod sigur conținută în acest interval. Spre deosebire de prima metodă, timpul de execuție al programului este mărit cu un factor mai mare decât 2 iar capacitățile de stocare vor fi tot de aproximativ două ori mai mari decât pentru o rulare obişnuită.
- **Aritmetica zecimalelor semnificative** încearcă să găsească urmă zecimamelor care se pierd, inevitabil, pe parcursul execuției, din cauza rotunjirilor. Prin utilizarea metodei putem avea siguranța că, la sfârşitul fiecărui calcul, zecimalele reținute vor fi doar cele semnificative.
- **Abordarea statistică** pare a fi cea mai promițătoare metodă la ora actuală, furnizând o teorie matematică adecvată pentru propagarea erorilor prin utilizarea deviației standard, a varianței distribuției sau prin estimarea acumulărilor de erori. Metoda implică o analiză substanțială şi resurse mari din puncte de vedere al timpului de excutare, însă rezultatele obținute sunt remarcabile.

Bibliografie

[BS94] **V. Brânzănescu, O Stănăşilă**, *Matematici speciale*, Ed. ALL, 1994

[CdB81] **S. D. Conte, C. de Boor**, *Elementary Numerical Analysis. An Algorithmic Approach*, McGraw Hill, 1981

[For01] **A. Fortiş**, *Probabilități şi statistică*, Ed. Eubeea, 2001

[***] ***, *Probability and Theory of Errors*, The Cornell Library Historical Mathematics Monographs