Despre polinoamele lui Cebîşev

Asist. drd. Alexandra Fortiş
Universitatea "Tibiscus", Timişoara

ABSTRACT. In this paper we are introducing the Chebyshev polynomials together with their most important properties. Those polynomials are playing an essential role for the optimization of Richardson method, presented here in a schematic form. This is a problem similar to another classical problem in numerical analysis: the identification of the best approximation of a regular function by an interpolating Lagrange polynomial. The Chebyshev polynomials are representing a remedy against the loss of signifiance or illconditioning in approximation problems.
Key words: Chebyshev polynomials, Richardson method, optimization

1 Introducere

În această lucrare vom introduce polinoamele lui Cebîşev de speța întâi împreună cu principalele lor proprietăți, polinoame care sunt utilizate în special în tehnicile caracteristice analizei numerice şi au aplicații în multiple domenii ale matematicii. În practică, dezvoltarea funcțiilor prin intermediul polinoamelor lui Cebîşev constituie un remediu împotriva pierderii semnificației, cu alte cuvinte a măririi importanței erorilor produse de utilizarea metodelor iterative de calcul.

În particular, aceste polinoame joacă un rol deosebit în optimizarea metodei lui Richardson, problemă foarte apropiată de problema clasică de identificare a celei mai bune aproximații a unei funcții regulate prin intermediul unui polinom.

2 Metoda Richardson

Ideea lui Richardson propune o metodă bazată pe iterații cu pas variabil şi, pentru convergența schemei cu diferențe finite simplă explicită,

$$\frac{u_{mn}^{p+1} - u_{mn}^{p}}{\tau} = \Lambda_{xx} u_{mn}^{p} + \Lambda_{yy} u_{mn}^{p} - \varphi(x_m, y_n)$$

$$u_{mn}^{p+1}\Big|_{\Gamma} = \psi(s_{mn}), u_{mn}^{0} = \psi_0(x_m, y_n), m, n = 1,2,\dots, M-1$$

constă în amortizarea fiecăreia dintre funcțiile date $\psi^{(r,s)} = 2\sin \pi r/M \sin \pi s/M$, urmată de dezvoltarea erorii aproximației inițiale în serie Fourier, după formulele

$$c_{rs}^{p+1} = (1 - \tau\mu_{rs}) c_{rs}^{p}, \mu_{rs} = 4M^2\left(\sin^2 \frac{\pi r}{2M} + \sin^2 \frac{\pi s}{2M}\right)$$

Pentru un τ ales şi fixat, nu toate funcțiile se amortizează la fel de repede, motiv pentru care Richardson a sugerat modificarea acestui parametru la fiecare iterație, pentru ca, după un anumit număr de repetări ale algoritmului utilizat, funcțiile $\psi^{(r,s)}$ să fie amortizate mai mult sau mai puțin uniform.

Procesul iterativ al lui Richardson este dat de formulele

$$u_{mn}^{p+1} = u_{mn}^{p} + \tau_{p+1}[\Lambda_h u_{mn}^{p} - \varphi(x_m, y_n)], m, n = 1,2,\dots, M-1$$

$$u_{mnn}^{p+1}\Big|_{\Gamma} = \psi(s_{mn}), u_{mn}^{0} \ dat$$

cu parametrul de iterație τ_{p+1} depinzând de numărul iterației.

Nu se va prezenta aici metoda în amănunt, şi nici modul de aplicare, acestea fiind expuse pe larg în bibliografia de specialitate [3]. Ceea ce este de reținut este faptul că, aşa cum a fost expusă de către Richardson, metoda de alegere a parametrilor este una neoptimală, motiv pentru care s-a căutat un mod de aplicare care să mărească viteza de amortizare a erorilor iar soluția a fost descoperită prin introducerea polinoamelor lui Cebîşev.

Aşa cum a fost menționat şi mai sus, această prezentare se apropie foarte mult de clasica problemă MIN-MAX pe care o vom prezenta, pe scurt, în cele ce urmează. Atunci când se efectuează un ciclu de paşi de timp $\Delta t = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, optimizarea acestor parametri se realizează atunci când raza spectrală a ciclului este minimă iar aceasta conduce la punerea următoarei probleme

$$\min_{\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_k} \max_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \prod_{j=1}^{k} (1 - \lambda \tau_j) \right|^{1/k}$$

Această problemă admite câteva soluții exacte şi altele apropiate, în funcție de forma domeniului Ω care poate înlocui spectrul discret $\sigma(A)$, în cazul în care se lucrează cu funcții reale iar problema se reformulează astfel

$$\min_{\tau_1,\tau_1,\ldots,\tau_k} \max_{\lambda\in\Omega} \left| \prod_{j=1}^{k} (1-\lambda\tau_j) \right|^{1/k}$$

Obținerea parametrilor optimali $\{\tau_j\}$ care sunt soluții ale problemei de mai sus se realizează printr-un ciclu iterativ cunoscut în literatura de specialitate sub numele de **metoda iterativă a lui Richardson** sau **metoda de accelerație Cebîşev**.

Punctul de plecare în demersul nostru îl poate constitui următorul rezultat:

Teorema 1. *O funcție f care este continuă pentru $a \le x \le b$ are o unică cea mai bună aproximație printr-un polinom de grad n. Acest polinom este cea mai bună aproximație pentru f pe intervalul $[a,b]$ dacă şi numai dacă există $n+2$ puncte $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b$ astfel încât*

$$(-1)^i [f(x_i) - p(x_i)] = \varepsilon \|f - p\|_\infty, i = 0,1,\ldots,n+1$$

cu $\varepsilon = \operatorname{sgn}[f(x_0) - p(x_0)]$.

Un exemplu deosebit de important este furnizat de cea mai bună aproximație printr-un polinom de grad n pe intervalul $[-1,1]$ pentru funcția $f(x) = x^{n+1}$, din cauză că eroarea cu care se găseşte această aproximație este un multiplu al polinomului lui Cebîşev de grad $k+1$, $T_{k+1}(x)$.

3 Polinoamele lui Cebîşev de speța întâi

Polinoamele pe care le prezentăm în lucrarea de față, au fost numite astfel în onoarea matematicianului rus P. Cebîşev. Pentru definirea lor se pleacă de la formula lui Moivre:

$$\cos k\theta + i \cdot \sin k\theta = (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)^k$$

din care extragem partea reală

$$\cos k\theta = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} \cos^{k-2m}\theta \cdot (-1)^m (1-\cos^2\theta)^m \overset{def}{=} T_k(\cos\theta)$$

Polinoamele lui Cebîşev se mai pot scrie şi sub forma

$$T_k(x) = \frac{k}{2} \sum_{r=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^r}{k-r} C_r^{k-r} (2x)^{k-2r} = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} x^{k-2m} (x^2-1)^m = \cos(k\cos^{-1} x)$$

cu $-1 \le x \le 1$ sau, sub formă de determinant

$$T_k(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

În continuare vom prezenta principalele proprietăţi ale acestor polinoame.

Proprietatea 1. *Polinomul $T_k(x)$ are exact gradul k.*

Plecând de la una dintre relaţiile de definiţie, se remarcă faptul că $T_k(x)$ este o sumă de polinoame de grad k iar coeficientul termenului care îl conţine pe x^k este

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} = 2^{k-1} \neq 0$$

relaţie care ne indică, pe lângă faptul că gradul polinomului este exact k şi informaţii legate de paritatea acestui polinom, care este dată de acelaşi k.

Proprietatea 2. $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$

Aceasta proprietate mai este cunoscută şi sub numele de relaţia de triplă recurenţă pentru polinoamele lui Cebîşev şi este utilizată deseori pentru evaluarea acestora, în cazul în care nu se doreşte utilizarea uneia dintre relaţiile de definiţie explicite.

Relaţia se poate demonstra foarte uşor, plecând de la identitatea trigonometrică

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Aplicând această relaţie obţinem

$$T_{k+1}(x) = \cos[(k+1)\theta] = \cos(k\theta + \theta) = \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta$$

$$T_{k-1}(x) = \cos[(k-1)\theta] = \cos(k\theta - \theta) = \cos k\theta \cos\theta + \sin k\theta \sin\theta$$

Prin adunarea acestor două relaţii obţinem relaţia de recurenţă căutată

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2\cos k\theta \cos\theta = 2xT_k(x)$$

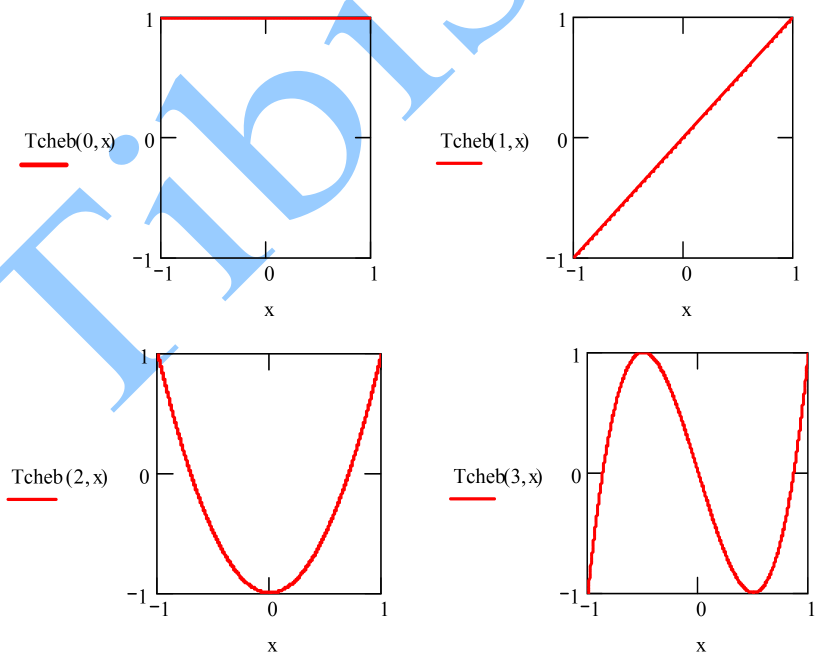
Proprietatea 3. $|T_k(x)| \le 1, \forall x \in [-1,1]$

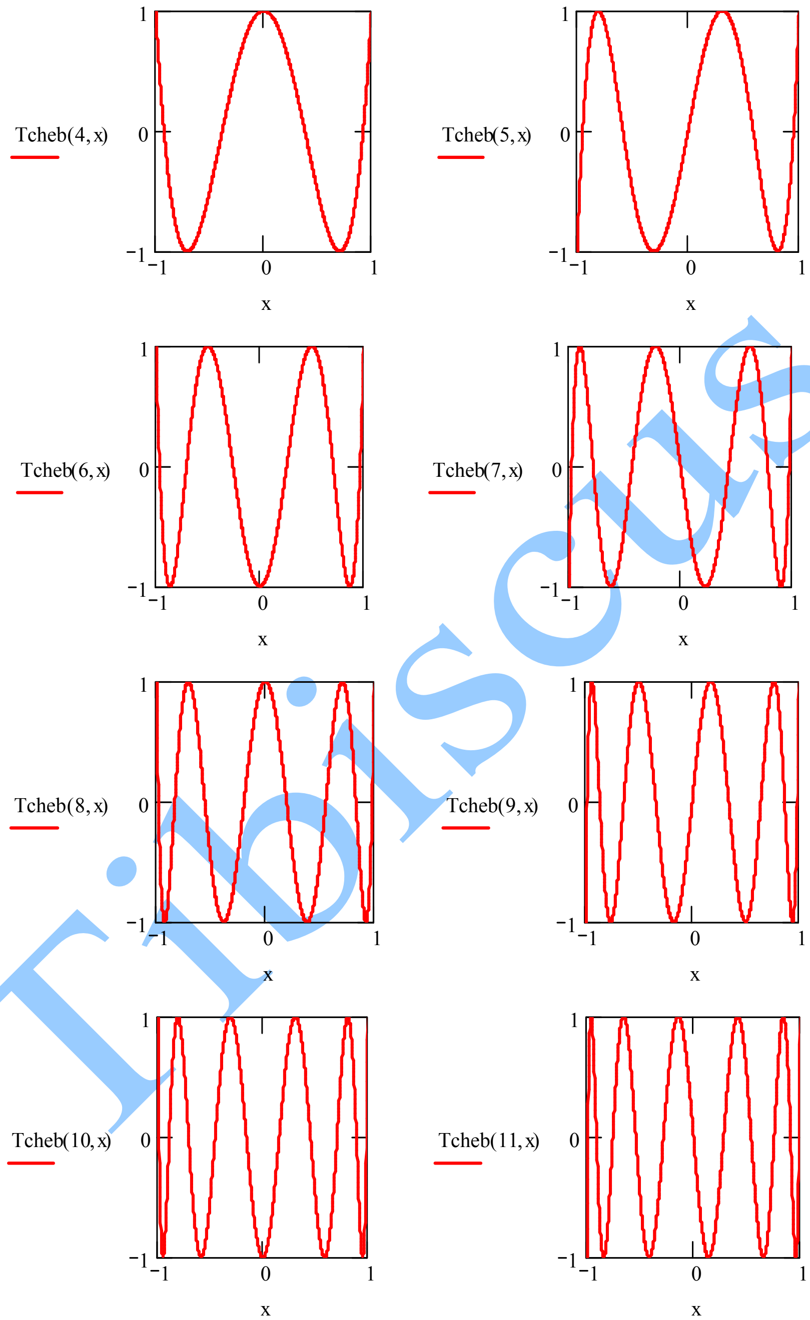
Afirmaţia este evidentă, rezultând din relaţia de definiţie şi a fost numită proprietatea valorii minime pentru polinoamele lui Cebîşev.

Relaţia de recurenţă prezentată anterior permite generarea primelor elemente ale seriei de polinoame ale lui Cebîşev, polinoame care vor fi trasate mai jos prin intermediul instrumentului grafic furnizate de MathCAD.

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$
$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$
$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$

Aceste exprimări întăresc prima proprietate, arătând în mod evident că, de fapt, este vorba despre o exprimare în formă polinomială, mai greu de depistat în urma vizualizării diferitelor relații de definiție.





În exteriorul intervalului de definiție, [-1,1], polinomul $T_k(x)$ prezintă o variație uniformă şi nu se anulează, prin urmare, extremele şi zerourile sale se află în interiorul acestui interval. Nu vom insista aici pe prezentarea rezolvării matematice a acestor chestiuni pe care le vom include în următoarea proprietate.

Proprietatea 4. *Polinomul* $T_k(x)$ *are* k *zerouri distincte în intervalul [-1,1] care se realizează pentru valori ale abscisei date de formula*

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2k}, i = 1,2,\ldots,k$$

Extremele polinomului $T_k(x)$ *sunt egale cu 1 şi -1 în mod alternativ, sunt* $k+1$ *valori în intervalul [-1,1] şi sunt localizate prin intermediul absciselor*

$$x_j = \cos\frac{j\pi}{k}, j = 1,2,\ldots,k$$

Proprietatea 5. *Polinoamele* $T_k(x)$ *formează o familie de polinoame ortogonale relativ la următorul produs scalar, definit pentru funcţii continue pe intervalul [-1,1] prin relaţia*

$$(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pentru a demonstra această proprietate vom alege doi întregi pozitivi distincţi k,l şi vom calcula produsul scalar

$$(T_k,T_l) = \int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^{0} \cos k\theta \cos l\theta \frac{-\sin\theta d\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(k+l)\theta + \cos(k-l)\theta]d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+l}\sin(k+l)\theta + \frac{1}{k-l}\sin(k-l)\theta\right]_0^{\pi} = 0$$

Proprietatea 6. *Folosind un polinom Cebîşev de speţa întâi, definim*

$$c_j = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)T_j(x_k) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left[\cos\left(\frac{\pi(k-1/2)}{N}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi j(k-1/2)}{N}\right)$$

Atunci

$$f \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_k T_k(x) - \frac{1}{2}c_0$$

Proprietatea se mai numeşte şi formula de aproximare a lui Cebîşev şi această formulă este exactă pentru cele N zerouri ale polinomului lui Cebîşev de grad n. Acest tip de aproximare este important deoarece, prin trunchiere, eroarea se propagă în mod uniform pe intervalul $[-1,1]$.

Proprietatea 7. $T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \arccos x), x \in [-1,1] \\ ch(k \cdot Argchx), x > 1 \end{cases}$

În plus, dacă $x < -1$*, paritatea polinoamelor lui Cebîşev permite scrierea*

$$T_k(x) = (-1)^k T_k(-x) = (-1)^k ch[k \cdot Argch(-x)].$$

În particular, pe baza acestei proprietăţi mai obţinem şi valorile polinoamelor lui Cebîşev în extremităţile intervalului de definiţie

$$T_k(1) = \cos(k \cdot 0) = 1$$

$$T_k(-1) = (-1)^k T_k(1) = (-1)^k$$

4 Remarci finale

Vom introduce o versiune modificată a polinomului $T_k(x)$, folosită de multe ori în aplicaţiile practice, în locul polinoamelor lui Cebîşev, în modul următor

$$\widetilde{T}_k(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_k(x) = x^n + termeni\ cu\ grad\ mai\ mic\ de\ n$$

Formularea a fost sugerată de faptul că

$$T_k(x) = 2^{k-1} x^k + termeni\ cu\ grad\ mai\ mic\ de\ n$$

precum şi de proprietatea valorii minime pentru polinoamele lui Cebîşev. Astfel, se remarcă faptul că

$$|\widetilde{T}_k(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}}, -1 \le x \le 1$$

Înainte de a prezenta ultimul rezultat al acestui studiu, vom menţiona că un polinom care are coeficientul termenului cu cel mai mare grad egal cu unitatea, se numeşte polinom monic iar $\widetilde{T}_k(x)$ este un astfel de polinom.

Teorema 2. *Fie* $k \ge 1$ *un număr întreg şi să considerăm toate polinoamele monice posibile de grad* n. *Atunci polinomul monic cu cel mai mic maxim atins în intervalul* $[-1,1]$ *este polinomul modificat al lui Cebîşev* $\widetilde{T}_k(x)$ *şi valoarea sa maximă pe intervalul menţionat este* $1/2^{n-1}$.

Rezultatul este utilizat în generarea aplicaţiilor pentru polinoamele lui Cebîşev şi se foloseşte în obţinerea unor scheme de interpolare îmbunătăţite, cum este şi cazul metodei lui Richardson.

Asupra folosirii concrete a polinoamelor lui Cebîşev, precum şi a diferitelor forme modificate ale acestora, precum şi asupra posibilităţilor de implementare a teoriilor legate de ele în diferite pachete de programe matematice (MathCAD, Maple, Matlab), vom reveni cu exemple în lucrări viitoare.

Bibliografie

[CdB81] **S. D. Conte, C. de Boor**, *Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach*, McGraw-Hill International Editions, 1981

[Des98] **J. A. Désidéri**, *Modèles discrets et schémas itératifs. Applications aux algorithmes multigrilles et multidomaines*, Univ. Nice - Sophia Antipolis, France, 1998

[GR77] **S. K. Godunov, V. S. Reabenki**, *Scheme de calcul cu diferenţe finite*, Ed. Tehnică, 1977

[***] ***, *Enciclopedia Wikipedia*, www.wikipedia.org