Anale. Seria Informatică. Vol. II fasc. II
Annals. Computer Science Series. 2nd Tome 2nd Fasc.

Utilizarea operatorului Sturm-Liouville în modelarea transferului termic unidimensional

Lector dr. ing. Amado Ştefan
Academia Tehnică Militară, Bucureşti

ABSTRACT. In the paper is analysis unidirectional transfer phenomenon characterization with the partial derivation equation with initial and boundary condition . The solution v(x,t) with the product form X(x). T(t) to lead at Sturm - Liouville problem for X(x) variable. At final is establish the general solution v(x,t) and analysis two cases of studyes.

1 Transfer unidimensional

Se consideră un fenomen de transfer unidimensional caracterizat de ecuaţia:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - c\,u(x,t). \tag{1}$$

Prin substituţia:

$$u(x,t) = v(x,t)\exp(\mu x + \lambda t) \tag{2}$$

deducem:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}(2a\mu - b) + v(x,t)(a\mu^2 - \lambda - b\mu - c). \tag{3}$$

Anulând în (3) cele două paranteze ($\mu = \frac{b}{2a}$, $\lambda = - c - \frac{b^2}{4a}$) ecuaţia (1) devine:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4}$$

la care se ataşază condiţia iniţială:

$$v(x,0) = f(x), \tag{5}$$

şi condiţiile la limită:

$$v(0,t) = 0 \quad , \quad v(L,t) = 0. \tag{6}$$

Dacă condiţiile la limită sunt: v(0,t) = v_0, v(L,t) = v_1 atunci prin schimbarea:

$$w(x,t) = v(x,t) + (v_0 - v_1)\frac{x}{L} - v_0, \tag{7}$$

rezultă:

$$w(x,0) = v(x,0) + (v_0 - v_1)\frac{x}{L} - v_0 = f_1(x), \tag{8}$$

care devine condiţie iniţială, în locul relaţiei (5), iar w(0, t) = 0 şi w(L, t) = 0 astfel încât condiţiile la linită rămân omogene.

Se caută soluţii ale ecuaţiei (4) cu condiţia iniţială (5) şi condiţiile la limită (6) de forma:

$$v(x,t) = X(x)T(t), \tag{9}$$

care introdusă în (4) conduce la egalitatea:

$$\frac{\left(\frac{dT}{dt}\right)}{aT(t)} = \frac{\left(\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right)}{X(x)} \tag{10}$$

În relaţia (10) variabilile x şi t sunt separate, prin urmare avem:

$$\frac{\left(\frac{dT}{dt}\right)}{aT(t)} = \frac{\left(\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right)}{X(x)} = -\lambda, \tag{11}$$

în care λ este o constantă. Din (11) se obţin două ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dT(t)}{dt} + a\lambda T(t) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda X(x) = 0, \tag{13}$$

cu condiţiile la limită:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \tag{14}$$

2 Problema Sturm - Liouville

Ecuația (13) cu condițiile la limită (14) constituie o problemă Sturm-Liouville. Valorile lui λ pentru care problema Sturm-Liouville admite soluții nebanale se numesc valori proprii sau valorii caracteristice ale operatorului diferențial cu condițiile la limită respective. Soluțiile nebanale $X(x)$ se numesc funcții proprii sau funcții caracteristice.

O formulare mai generală a problemei dată de ecuația (4) cu condițiile (5) şi (6) este ecuația lui R. Courant şi D. Hilbert:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right]-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \tag{15}$$

cu condițiile la limită:

$$A_0X(0)+B_0\frac{dX}{dx}(0)=0, \quad A_1X(t)+B_1\frac{dX}{dt}(t)=0, \tag{16}$$

în care A_0, B_0, A_1, B_1 sunt constante date.

Operatorul:

$$LX=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right]-qX, \tag{17}$$

se numeşte operator Sturm - Liouville. Ecuația:

$$A(x)\frac{d^2X(x)}{dx^2}+B(x)\frac{dX(x)}{dx}+C(x)X(x)=0, \tag{18}$$

care se obține la separarea variabilelor poate fi scrisă ca un operator Sturm-Liouville prin înmulțirea ei cu $\rho(x)$ şi folosirea relațiilor:

$$p(x)=\rho(x)A(x), \quad \rho(x)C(x)=-q(x),$$

$$\frac{d}{dx}\big(\rho(x)A(x)\big)=\rho(x)B(x),$$

$$\rho(x)=\exp\Big(\int\frac{B(x)-\frac{dA(x)}{dx}}{A(x)}dx\Big). \tag{19}$$

3 Concluzii

- Soluțiile ecuației (13) cu condițiile la limită (14) sunt nebanale numai în cazul $\lambda>0$. Avem:

$$X(x)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x), \tag{20}$$

care, cu considerarea condiției X(0) = 0, devine:

$$X(x) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)\,. \qquad (21)$$

Constanta C_2 fiind nenulă, din condiția la limită X(L) = 0, rezultă $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$ sau $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ cu soluții de tipul: $X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{L}x)$, determinate cu aproximația unui factor arbitrar.

- Valorilor λ_n le corespund soluțiile nebanale ale ecuației.(12) de forma:

$$T_n(t) = C_n \exp(-a\lambda_n t)\,, \qquad (22)$$

în care C_n sunt coeficienți nedeterminați. Rezultă:

$$v_n(x,t) = C_n \exp(-a\lambda_n t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,, \qquad (23)$$

soluții particulare ale ecuației (4) care satisfac condițiile (5) şi (6).

- Conform principiului suprapunerii soluțiilor seria:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 at} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,, \qquad (24)$$

este o soluție a ecuației (4). Coeficienții C_n se determină din condiția inițială (5):

$$v(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,, \qquad (25)$$

C_n fiind coeficienții Fourier ai funcției f(x) în dezvoltarea ei în serie pe intervalul (0,L).

- Soluția v(x,t) se scrie sub forma generală:

$$v(x,t) = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}\psi)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}at} \right] f(\psi)d\psi\,. \qquad (26)$$

Studiu de caz 1

Se analizează transferul termic unidimensional pentru L = 1, $f(x) = -x^2 + Lx$, a = 0,1...0,5.
Utilizând relația (26) se obține:

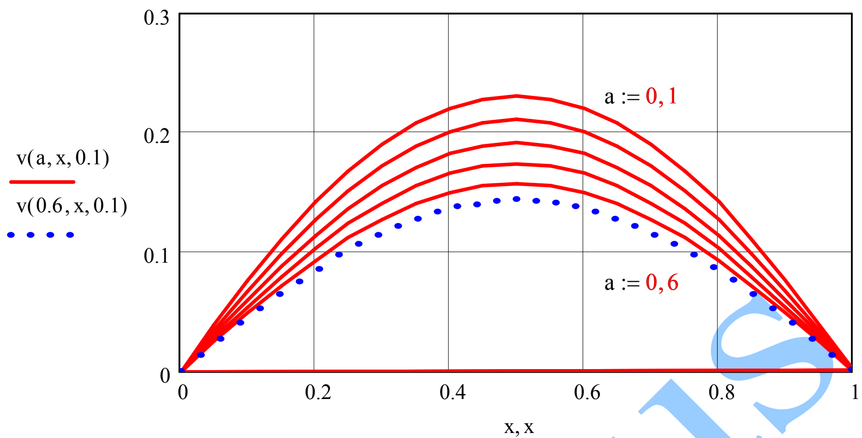

Fig.1: Variația mărimii v în funcție de parametrul a pe intervalul $\left[0, L = 1\right]$ la t = 0.1

Studiu de caz 2

Se consideră datele de la studiul de caz 1 şi se analizează variația în timp a mărimii v la x =0,5 parametrul a = 0,05 ; 0,1 ; 0,3 şi 0,6 la valori ale timpului $t \in \left[0,5\right]$. Rezultă:

$t := 0, 0.1 .. 5$

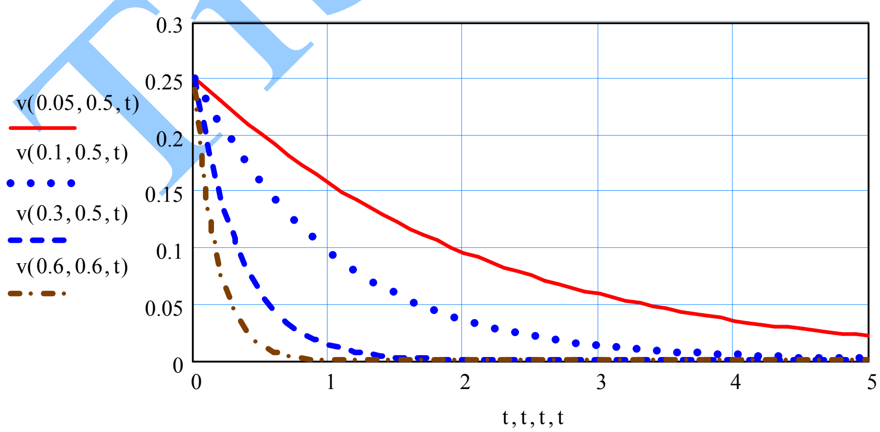

Fig.2: Variația mărimii v în funcție de parametrul a pe intervalul $t \in \left[0,5\right]$ la x = 0,5

Bibliografie

[Abr78] **Abramovici, G.,N.** - *Pricladnaia gazovaia dinamica*, Gostehizdat, 1978.

[Bej96] **Bejan, A.** - *Termodinamică Tehnică Avansată*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996.

[DF65] **Daugherty, R.,L., Franzini, J., B**. - *Fluid mecanics with Engineering applications*, Mc.Graw, New York, 1965.

[MBR98] **Marinescu, M., Băran, N., Radcencu, V**. - *Termodinamică Tehnică*, MATRIX ROM, Bucureşti, 1998.

[Şte03] **Ştefan A., G.** - *Analiza fenomenelor termodinamice prin metoda elementelor finite*, Ed. Mirton, Timişoara 2003

[Zem68] **Zemansky, M., W**. - *Heat and Thermodynamics*, Fifth ed., McGraw-Hill Book Comp., New York, 1968.