O aplicație a spațiilor de procese fuzzy

Conf.dr. Lucian Luca, Asist. Adela Ionescu,
Universitatea „Tibiscus" Timişoara
Mat.ec. Sorina-Carmen Luca
Anglo Romanian Bank Ldt.- Timişoara

ABSTRACT. The study presents an application of the fuzzy processes spaces in the domain of the transmission of information. The model of the fuzzy processes space replaces the classic mathematic model of the transmission through disturbed channels. This was introduced for the first time in [LD01] as a generalization of the model of the processes space [Neg95].

1 Introducere

Vom reaminti, pentru început, noțiunea de ***proces fuzzy,*** un formalism pentru ideea de contract fuzzy dintre un aparat şi mediul său, introdus în [LD01] şi dezvoltat în [Luc03]. Un astfel de contract specifică interfața aparat-mediu în termeni de execuții.

Execuțiile pot fi secvențe de evenimente, funcții de timp, etc., însă noi le-am considerat doar ca elemente ale unei mulțimi arbitrare *E*. Deoarece nu am făcut presupuneri despre structura elementelor lui *E,* am putut înzestra procesele cu proprietăți algebrice şi am putut demonstra o serie de caracteristici ale lor.

Există multe semnificații ale termenului de proces. În primul rând, un proces este legat de fluxuri în lumea reală, de schimbări progresive observabile ale structurii unui sistem. Apoi, un proces este o modificare structurată, adică există un tipar de evenimente pe care un observator îl poate recunoaşte printre aparițiile procesului.

O altă distincție importantă este cea dintre procesele naturale şi artificiale. Ştim că procesele artificiale sunt construite de oameni şi ele există cu scopul mărturisit de a schimba starea lumii reale sau de a o constrânge într-un anume fel, astfel încât să satisfacă cerinţele umane. Procesele artificiale trebuie să fie pornite de către un agent, pentru a transforma lumea, pe când procesele naturale nu. Dacă agentul este o maşină, există predictibilitate şi determinism în proces, care permit o descriere precisă. Dacă agentul este uman, nu există nici o garanţie că evenimentul anticipat va avea loc; el este ne-determinist.

Pe de altă parte, agenţii umani au o capacitate adaptivă: un om poate percepe o greşeală sau o eroare din definiţia unui proces şi poate avea iniţiativa de a corecta. Astfel, obiectivul procesului poate fi atins chiar dacă procesul originar era greşit, iar aceasta este diferenţa esenţială dintre lumea maşinilor şi cea a oamenilor.

În cele ce urmează, prin sisteme care interacţionează vom înţelege sistemele care pot fi cuplate şi comparate. Spaţiul proceselor fuzzy este tocmai o teorie unificată a sistemelor care interacţionează, inclusiv a sistemelor concurente, ca şi caz particular.

Pentru a simplifica modelul, vom folosi roluri, adică o mulţime de standarde, descrieri şi norme atribuite unei persoane sau poziţie. Cele două roluri principale pe care le folosim sunt maşina şi mediul său. Să notăm faptul că un rol are două aspecte: o responsabilitate (drepturi, puteri, îndatoriri) şi un şablon pentru acţiuni, unele dintre ele implicând interacţiunea cu alte roluri.

2 Formalismul de bază

Fie E mulţimea tuturor execuţiilor şi fie $\Delta : E \to [0,1]$ şi $\Gamma : E \to [0,1]$ două submulţimi fuzzy ale lui E. În cele ce urmează, vom nota cu:

$X = \{x \in E \mid \Delta(x) > 0\}$, $Y = \{x \in E \mid \Gamma(x) > 0\}$, $B = \{x \in E \mid \Delta(x) = \Gamma(x) = 0\}$

şi vom numi, respectiv, pe:

- X - mulţimea execuţiilor accesibile;
- Y - mulţimea execuţiilor acceptabile;
- B - mulţimea blocărilor.

Mai mult, vom nota $\Delta_X = \Delta_{/X}$, $\Gamma_Y = \Gamma_{/Y}$.

Definiţia 1: *Perechea* $p = (\Delta_X, \Gamma_Y)$, *unde* Δ_X *şi* Γ_Y *sunt definite ca mai* *sus, se numeşte* ***proces fuzzy*** *(vag) peste E. Mulţimea tuturor proceselor fuzzy peste o pereche de submulţimi crisp X şi Y ale lui E, ca mai sus, se numeşte* ***spaţiul proceselor fuzzy ale lui (X,Y)****, iar mulţimea tuturor proceselor fuzzy peste E se numeşte* ***spaţiul proceselor fuzzy ale lui E****.*■

Un proces fuzzy $p = (\Delta_X, \Gamma_Y)$ reprezintă un contract între aparat şi mediul său: aparatul garantează că pot să apară numai execuţii din X, pe când mediul garantează că numai execuţiile din Y pot să apară.

Aparatul poate accesa, respectiv accepta, o execuţie. O execuţie $x \in E$ este *(X,Y)-complet accesibilă* dacă $\Delta(x) = 1$ şi ea este *(X,Y)-complet acceptabilă* dacă $\Gamma(x) = 1$.

Din punctul de vedere al teoriei clasice (crisp) a mulţimilor, un proces fuzzy partiţionează mulţimea E a tuturor execuţiilor în patru submulţimi disjuncte: $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, X \cap Y, B$ unde:

$$\widetilde{X} = \{x \in E \mid \Delta(x) = 0 \wedge \Gamma(x) > 0\},\ \widetilde{Y} = \{x \in E \mid \Gamma(x) = 0 \wedge \Delta(x) > 0\}.$$

Evident, $\widetilde{X} \cap \widetilde{Y} = \phi$

Vom numi elementele lui $\widetilde{X}$ ***scăpări*** şi ele trebuie evitate de aparat. Vom numi elementele lui $\widetilde{Y}$ ***refuzări*** şi ele trebuie evitate de către mediu. Împreună, elementele lui $\widetilde{X} \cup \widetilde{Y}$ le vom numi ***violări***.

Înţelegerea stipulează că numai execuţiile din $X \cap Y$ sunt permise să apară în prezenţa aparatului. Din această cauză, $X \cap Y$ se mai numeşte şi ***mulţimea contract***, iar execuţiile $x \in X \cap Y$ se mai numesc şi ***scopuri***, deoarece ele sunt legale atât pentru aparat, cât şi pentru mediu. Mulţimea X conţine execuţiile pentru care aparatul respectă înţelegerea (iar mediul poate să o respecte sau să nu o respecte); mulţimea Y conţine execuţiile pentru care mediul respectă înţelegerea (iar aparatul poate să o respecte sau să nu o respecte). În mulţimea $X \cup Y$ încă putem avea execuţii cu gradul de acceptabilitate sau cu gradul de accesabilitate egal cu zero, dar nu ambele zero pentru o execuţie dată (figura 1).

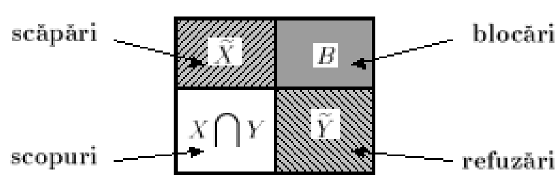

Figura 1: Tipuri de execuţii

3 Condiții de corectitudine

Proprietatea de ***corectitudine absolută*** în spațiul proceselor fuzzy formalizează faptul că un aparat operează corect prin el însăşi, adică aparatul nu impune nici o cerință mediului. În acest sens, aparatul de numeşte ***robust***. În termeni de execuții evitate, această proprietate conduce la o mulțime de refuzări vidă pentru procesul corespunzător.

Proprietatea simetrică este aceea că aparatul nu oferă nici o garanție mediului. În termeni de execuții evitate, aceasta conduce la o mulțime de scăpări vidă pentru procesul corespunzător. În acest sens, aparatul se zice ***haotic***.

Definiția 2: *Procesul fuzzy* $p = (\Delta_X, 1_E)$ *se zice* ***robust****, iar procesul fuzzy* $p = (1_E, \Gamma_Y)$ *se zice haotic.* ■

În cele ce urmează, vom nota cu R_E şi H_E mulțimea proceselor robuste, respectiv haotice peste *E*. Procesul $p = (1_E, 1_E)$ este singurul proces fuzzy care este robust şi haotic în acelaşi timp.

Definiția 3: *Procesul fuzzy vid,* Ω*, este dat de* $\Omega = (1_E, 1_E)$. ■

Acest proces nu are nici scăpări şi nici refuzări. Astfel, el nici nu oferă garanții şi nici nu impune restricții mediului.

Proprietatea de ***corectitudine relativă*** în spațiul proceselor fuzzy formalizează faptul că un proces fuzzy *q* este un substitut satisfăcător pentru un proces fuzzy *p*. *q* ar trebui să impună mai puține cerințe mediului şi să-i ofere mai multe garanții decât *p*. În termeni de execuții evitate, acesta înseamnă că *q* are o mulțime de execuții acceptabile mai mare şi o mulțime de execuții accesibile mai mică, decât cele corespunzătoare lui *p*.

Definiția 4: *Date două procese fuzzy pentru aceeaşi mulțime E de execuții,* $p = (\Delta^p_{X_p}, \Gamma^p_{Y_p})$ *şi* $q = (\Delta^q_{X_q}, \Gamma^q_{Y_q})$*, spunem că procesul fuzzy p este rafinat de către procesul fuzzy q şi scriem* $p \sqsubseteq q$ *dacă şi numai dacă* $(\Delta^p(x) \geq \Delta^q(x)) \wedge (\Gamma^p(x) \leq \Gamma^q(x)), \forall x \in E$. ■

Câteva proprietăți interesante legate de rafinare pot fi găsite în [LD01] şi [Luc03].

4 Modelul matematic clasic al transmiterii informației

Noțiunea de informație [LIL05] este intim legată de transmiterea ei. Informația apare sub formă de mesaje codificate prin simboluri care, pentru a putea fi transmise, trebuie materializate sub forma unor semnale.

Schema generală de transmitere a informației, indiferent de natura sa, este prezentată în figura 2. ([LIL05]):

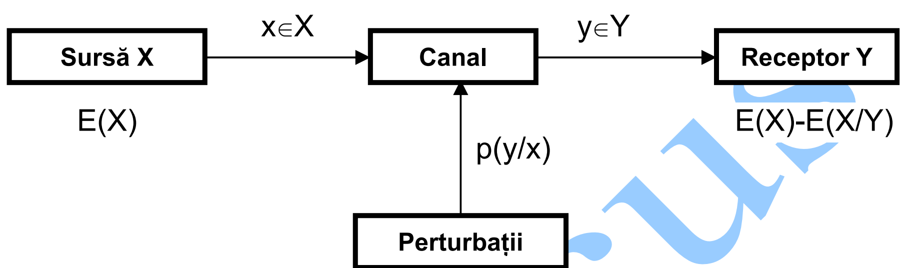

Figura 2: Transmiterea informației pe canale perturbate.

Definirea sursei constă în a preciza semnalele ce urmează a fi transmise şi cantitatea de informație ce se transmite cu ajutorul acestor semnale. Semnalele purtătoare de informație, emise de sursă, pătrund în canalul de comunicație care leagă sursa de recepție. Canalul este supus acțiunii perturbațiilor, astfel încât poate avea loc o alterare a semnalelor în drumul lor de la emitător către receptor.

Modelul matematic clasic al unui sistem de transmitere a informației este format din două mulțimi finite *X, Y* şi o probabilitate condiționată *p(y/x)*, definită pe *Y* pentru orice $x \in X$. *X* este mulțimea simbolurilor care se emit, iar *Y* mulțimea simbolurilor ce se recepționează. Probabilitatea *p(y/x)* se numeşte probabilitatea de recepție condiționată de ceea ce se emite şi caracterizează perturbația existentă pe canalul sistemului respectiv.

A cunoaşte canalul de comunicație înseamnă a cunoaşte probabilitățile *p(y/x)* pentru toate simbolurile $x \in X$ şi $y \in Y$.

Se poate acum introduce mărimea *E(X/Y)*, ca fiind entropia câmpului de simboluri emise, condiționate de câmpul de simboluri recepționate. Ea reprezintă cantitatea medie de informație necesară pentru a se recepționa mulțimea *Y* şi depinde de probabilitatea condiționată *p(x/y)*, care la rândul ei, este determinată de probabilitatea *p(y/x)* ce caracterizează perturbația de pe canal.

Nedeterminarea *E(X/Y)* apare datorită perturbației; ea reprezintă tributul care trebuie plătit perturbaţiei, pentru a putea recepţiona semnalele $y \in Y$.

Dacă $E(X/Y)$ reprezintă cantitatea medie de informaţie care se pierde pe canal şi dacă de la sursă se transmite o cantitate de informaţie $E(X)$, la recepţie va ajunge numai o cantitate de informaţie egală cu:

$$E(X) - E(X/Y) \quad (1)$$

Întrucât cantitatea de informaţie este o mărime nenegativă, se obţine relaţia evidentă:

$$0 \le E(X) - E(X/Y) \le E(X) \quad (2)$$

Să analizăm două cazuri limită. Presupunem mai întâi că atunci cînd s-a recepţionat un simbol *y se* ştie cu precizie că el provine dintr-un simbol $x_y \in X$ emis de sursă. În acest caz se obţine $p(x_y/y)=1$ *şi* $p(x/y)=0$ pentru orice $x \neq x_y$, $x \in X$. Aceste condiţii implică $E(X/Y)=0$, ceea ce înseamnă că în canal nu se pierde nimic şi la recepţie ajunge cantitatea de informaţie care s-a emis, adică $E(X)$.

Într-o altă situaţie să presupunem că pe canal perturbaţia este atât de puternică încât între sursă şi recepţie nu există nici o dependenţă.

În acest caz există relaţia $E(X/Y)=E(X)$, care introdusă în (1) conduce la concluzia că recepţia nu mai primeşte nici o cantitate de informaţie, deci toată informaţia se pierde pe canal. Prin analiza acestor cazuri limită s-a verificat relaţia (2) în condiţii reale, ţinînd seama de faptul că entropia $E(X)$ este o funcţie continuă. Modelul matematic al transmiterii informaţiei a pus în evidenţă şi o altă mărime fundamentală, denumită ***capacitatea canalului***, a cărei expresie este dată de

$$C = \underset{p(x)}{Max}\left(E(X) - E(X/Y)\right) \quad (3)$$

Valoarea stabilită prin relaţia (3) se numeşte *capacitatea canalului,* deoarece dacă se consideră maximul diferenţei $E(X)-E(X/Y)$ pentru toate probabilităţile posibile la emisie, se pune în evidenţă cantitatea maximă de informaţie care poate să circule în mod util prin canalul dat.

Capacitatea unui canal depinde de nivelul perturbaţiilor şi de caracteristicile fizice ale canalului (lărgimea de bandă şi puterea la care se face transmiterea semnalelor). Atunci cînd se specifică valoarea capacităţii unui canal C, se indică faptul că prin canalul respectiv nu se poate transmite o cantitate de informaţiei mai mare decît C, fără a compromite recepţia.

Diferenţa $E(X)-E(X/Y)$ reprezintă cantitatea de informaţie obţinută în medie la trecerea prin canal a unui simbol al sursei, motiv pentru care se mai numeşte şi ***viteză de transmitere a informaţiei***.

Capacitatea unui canal este, aşadar, viteza maximă de transmitere pe canalul respectiv.

5 Modelul fuzzy al transmiterii informaţiei

Fie E mulţimea tuturor emisiilor şi fie $\Delta : E \to [0,1]$ şi $\Gamma : E \to [0,1]$ două submulţimi fuzzy ale lui E. În cele ce urmează, vom nota cu: $X = \{x \in E \mid \Delta(x) > 0\}$, $Y = \{x \in E \mid \Gamma(x) > 0\}$, $B = \{x \in E \mid \Delta(x) = \Gamma(x) = 0\}$ şi vom numi, respectiv, pe:

- X - cantitatea de informaţii emisă;
- Y – cantitatea de informaţie recepţionată;
- B – perturbarea maximă.

Mai mult, vom nota $\Delta_X = \Delta_{/X}$, $\Gamma_Y = \Gamma_{/Y}$.

Perechea $p = (\Delta_X, \Gamma_Y)$, unde Δ_X şi Γ_Y sunt definite ca mai sus, se numeşte ***canal de comunicaţie*** şi el reprezintă un *proces fuzzy* peste E, în sensul definiţiei 1.

Se observă că probabilitatea introdusă în modelul matematic clasic nu mai este necesară, deoarece efectul ei este suplinit în modelul fuzzy de modul cum se definesc submulţimile X şi Y, prin intermediul aplicaţiilor Δ şi Γ, cu valori în intervalul [0,1].

Plecând de la definiţia procesului fuzzy, putem demonstra o serie de proprietăţi ale canalului de comunicaţie legate de condiţiile de corectitudine (absolută şi relativă), putem defini canalul de comunicaţie robust, haotic, în conformitate cu aspectele prezentate în secţiunea 3.

De asemenea, se poate extinde teoria pentru mai multe canale de comunicaţie, aplicând diferiţi operatori definiţi în [Luc03].

Bibliografie

[Hoa85] **C. A. R. Hoare** - *Communicating Sequential Processes*, Prentice-Hall, London, 1985.

[LD01] **L. Luca, I. Despi** - *Toward a Definition of Fuzzy Processes*, Proceedings of the 5th International Symposium on Economics Informatics, Bucharest, pp. 855-859, May 2001.

[LIL05] **L. Luca, A. Ionescu, S.C. Luca** – *Bazele Informaticii*, Editura Mirton, Timişoara, 2005.

[Luc03] **L. Luca** – *Spaţii de procese fuzzy*, Ed. Mirton, Timişoara, 2003.

[Neg95] **R. Negulescu** - *Process spaces*, Technical Report CS-95-48, Department of Computer Science, University of Waterloo, Ontario, Canada, December, 1995.

[Neg98] **R. Negulescu** - *Process Spaces and Formal Verification of Asynchronous Circuits*, PhD thesis, Department of Computer Science, University of Waterloo, Ontario, Canada, August, 1998.