Aspecte privind determinarea drumului optim în matrice mari

Lect.dr.ing. Tiberiu Marius Karnyanszky
Universitatea „Tibiscus” din Timişoara

ABSTRACT. A lot of graphs applications are available in the modern technique, science or economy. Among these, the shortest-way determination is applied into large domains: traffic control, transportation, Internet routing, traffic planning, distribution policy. When the graph dimension is too big and the associated array is too large, the standard graphs algorithms may become unusuals. In this case, methods to accelerate the calculus will be used, each available solution will be applied; rare arrys is a possible technique.

1 Introducere

Teoria grafurilor este o parte a matematicii cu diferite domenii de aplicabilitate: probleme de micro- şi macroeconomie, reţele de distribuire a energiei electrice sau termice, reţele de transport rutier sau feroviar, probleme de elaborare a deciziilor, de lingvistică, de reţele de calculatoare şi suport tehnic pentru Internet şi multe altele ([Kar04]).

Printre aplicaţiile clasice specifice teoriei grafurilor se găseşte determinarea drumului minim între două vârfuri ale grafului; ca aplicaţie practică, aceasta ar putea însemna găsirea drumului cel mai scurt între două localităţi din sistemul de transport rutier.

În lucrarea de faţă se prezintă modul în care această problemă se poate rezolva, în condiţiile în care cantitatea de date aflate la dispoziţie este extrem de mare şi ca atare algoritmilor operaţionali li se caută procedee optimizate de funcţionare, capabile să utilizeze cantităţi minime de memorie şi un timp cât mai redus de calcul.

2 Material şi metodă

Cea mai uşor de implementat metodă de determinare a drumului optim (minim, în această discuţie) poartă numele de algoritmul **Bellman–Kalaba** deoarece aparţine lui R. Bellman şi R. Kalaba ([Ion73, Kar04]). Algoritmul de calcul aferent acestei metode, pentru determinarea drumului de lungime minimă de la vârful x_s la vârful x_d, (adică localităţile s şi d), presupune efectuarea următorilor paşi:

Pasul 1. Plecând de la graful cu vârfurile x_1, ..., x_n, (în exemplul analizat, vârfurile sunt reprezentate de localităţi) se construieşte matricea de adiacenţă (matricea tranziţiilor) A_m având următoarele valori:

- $a_{ij} = 0$ pentru $i = j$ deoarece se consideră graful fără bucle (adică nu există drumuri de la o localiate la ea însăşi);
- $a_{ij} > 0$, dacă există arc de la vârful x_i la x_j (în exemplul analizat, dacă există drum direct între cele două localităţi);
- $a_{ij} = \infty$, dacă nu există arc de la vârful x_i la x_j (în exemplul analizat, dacă nu există drum direct între cele două localităţi, drum care să nu treacă prin alte localităţi).

Pasul 2. Acestei matrice i se asociază vectorul coloană v_j care este coloana din A_m corespunzătoare vârfului final x_d:

$$v_j = (v_j)_i,\ i = 1, n,\ (v_j)_i = a_{id},\ i = 1, n \qquad (1)$$

Pasul 3. Din vectorul v_j se construieşte în continuare vectorul $(v_j)^2$ prin înmulţirea matricei A_m cu vectorul v_j:

$$(v_j)^2 = A_m \bullet (v_j) \qquad (2)$$

procedeu care se repetă până când se obţine egalitatea $(v_j)^{\lambda+1} = (v_j)^{\lambda}$

Pasul 4. În acest ultim $(v_j)^{\lambda}$ se obţine valoarea minimă a drumului de la x_s la x_d ca fiind elementul de pe linia s din vector, adică $(v_j)^{\lambda}_s$

Pasul 5. Pentru a determina care sunt vârfurile (localităţile) vizitate de acest drum se procedează astfel:

- se pleacă de la vârful x_s şi se determină toate diferenţele $(v_j)_s^{\lambda} - a_{sk}$, $k=1,n$; când se atinge egalitatea:

  $$(v_j)_s^{\lambda} - a_{sk} = (v_j)_k^{\lambda} \qquad (3)$$

  atunci vârful k astfel determinat urmează lui x_s în drumul de lungime minimă;

- procedeul se reia cu vârful $\boldsymbol{x_k}$ determinat ca mai sus, până se ajunge la vârful final $\boldsymbol{x_d}$;
- dacă la un pas există mai multe diferenţe egale cu valoarea lui $\boldsymbol{(v_j)_k^\lambda}$, toate acestea se reţin şi se caută mai multe drumuri care au aceeaşi lungime minimă.

Pentru problemele de determinare a drumului minim, operaţia de înmulţire a două matrice se face după formula:

$$c_{ij} = min\ (a_{i1}+b_{1j},\ a_{i2}+b_{2j},\ \ldots,\ a_{in}+b_{nj}) \tag{4}$$

Algoritmul general prezentat mai sus este foarte uşor de programat şi presupune efectuarea următorului volum de calcule:

- pentru fiecare nouă coloană $\boldsymbol{(v_j)^\lambda}$ determinată, se efectuează $\boldsymbol{n \bullet n}$ operaţii de adunare şi minim;
- numărul maxim de iteraţii este dat de numărul maxim de arce din graf, deoarece drumul optim ar putea fi compus, în cel mai defavorabil caz, din toate arcele din graf; pentru un graf cu $\boldsymbol{n}$ vârfuri, neorientat sau orientat, fără bucle, numărul maxim de arce (muchii) este:

$$m = \frac{n*(n-1)}{2} \tag{5}$$

Aşadar, numărul total de operaţii de calcul ce se execută este maxim:

$$NO = \frac{n^3*(n-1)}{2} \tag{6}$$

ceea ce, pentru un graf cu 10 vărfuri, înseamnă ***NO = 4.500*** operaţii, în timp ce, pentru un graf cu 1000 vârfuri, se ajunge la ***NO = 500 miliarde***...

În această situaţie, când grafurile sunt utilizate pentru exemple didactice sau pentru exemple simple în care grafurile nu au dimensiune mare, utilizarea matricelor şi calculele efectuate cu acestea nu pun probleme deosebite. Când dimensiunile grafurilor sunt extrem de mari şi pun probleme de reprezentare în memorie şi/sau de calcul, alte metode trebuie găsite şi aplicate.

Cu aceste argumente, utilizarea matricelor rare în reprezentarea problemelor specifice de algoritmica grafurilor îşi găseşte locul specific şi de aceea în continuare se prezintă modalitatea de utilizare a acestora cu specific în teoria grafurilor ([AR83], [Pop00]).

Pentru memorarea datelor se utilizează un sistem modificat în care nu sunt înregistrate toate elementele ci doar cele nenule, însoţite de poziţia lor în cadrul matricei; în primul rând, valorile de „∞” utilizate pentru a indica lipsa unei muchii (sau costul ei foarte mare) se înlocuiesc cu valoarea „0”. Astfel, elementele de valoare pozitivă din matricea de adiacență asociată grafului din Figura 1, sunt prezentate în Tabelul 1.

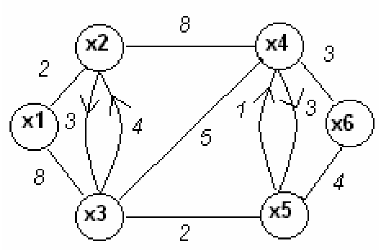

Fig.1. Graf pentru determinarea drumului de lungime minimă

Tabelul 1. Matricea de adiacență asociată grafului din figura 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	2	8	∞	∞	∞	x_1
2	0	3	8	∞	∞	x_2
8	4	0	5	2	∞	x_3
∞	8	5	0	3	3	x_4
∞	∞	2	1	0	4	x_5
∞	∞	∞	3	4	0	x_6

iar în urma modificării propuse ele pot fi memorate astfel:

2	8	2	3	8	8	4	5	2	8	5	3	3	2	1	4	3	4
1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6
2	3	1	3	4	1	2	4	5	2	3	5	6	3	4	6	4	5

în care pe prima linie sunt reprezentate valorile elementelor din matrice, pe a doua este indicele de linie iar pe a treia indicele de coloană, corespunzătoare valorilor respective.

Adaptările matricelor rare la teoria grafurilor nu se opresc însă aici; algoritmul Bellman-Kalaba citat mai sus permite găsirea drumului optim (minim în acest studiu) printr-o operație de înmulțire modificată față de înmulțirea obişnuită a matricelor. Astfel, dacă pentru înmulțirea a două matrice rare, formula uzuală:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj} \qquad (7)$$

se particularizează prin:

$$c_{ij} = \sum_{k, aik \neq 0, bkj \neq 0} a_{ik} * b_{kj} \qquad (8)$$

atunci pentru problema specifică de grafuri formula devine:

$$c_{ij} = \min_{k,\ a_{jk}\neq 0,\ b_{kj}\neq 0} (a_{jk}+b_{kj}) \qquad (9)$$

şi astfel algoritmul se simplifică şi mai mult, deoarece cele două matrice care intervin în calcul, ***A*** şi respectiv ***B***, conţin numai elemente nenule, aşa cum cere formula (9).

Mai mult decât atât, se poate observa că matricele ***B*** şi ***C*** (cu notaţia din formulele 7 – 9) sunt două matrice rare de tip coloană, deci pentru memorarea acestora se poate folosi o variantă a metodei prezentată anterioar în care sunt necesare doar componentele pentru valoare şi linie, nu şi cea pentru coloană.

3 Rezultate

Prin utilizarea matricelor rare, numărul de operaţii care se efectuează în timpul determinării unui drum optim se reduce extrem de mult. Aşa cum am prezentat mai sus, numărul total de operaţii care se execută dacă se folosesc matricele obişnuite se determină cu formula (6). Dacă însă în calcule se utilizează matrice rare, numărul de operaţii necesare NO se reduce extrem de mult, ţinând cont şi de densitatea matricelor (numărul de elemente nenule raportat la dimensiunea completă a matricei).

Abordarea determinării drumului optim folosind matrice rare a fost experimentată asupra reţelei de transport rutier a României, bazată pe existenţa a 265 oraşe şi municipii şi 2686 comune ([***03]). Aplicată la reţeaua de transport interorăşenesc, a permis memorarea acesteia în 3.000 elemente cu matrice rare (faţă de $265^2 \approx 70.000$ elemente cu matrice uzuale) şi determinarea unui drum optim, între oricare oraşe, în medie, în circa 10 secunde (faţă de 3 minute cu matrice uzuale). Complicând problema şi introducând reţeaua intercomune, memoria scade de la circa 72.000.000 elemente la mai puţin de 300.000 iar timpul corespunzător scade, în medie, de la 12 minute la 45 secunde.

4 Discuţii

Aşadar, acest scurt exemplu de calcul, prin extrapolare, demonstrează care sunt avantajele utilizării matricelor rare, în anumite probleme specifice de algoritmica grafurilor:

- în primul rând, consumul de memorie este mult redus, ceea ce poate fi interpretat şi sub forma posibilităţii de a utiliza matrice de adiacenţă de dimensiuni mult mai mari decât în cazul în care acestea sunt memorate integral;
- în al doilea rând, fiind eliminate din calcule elementele nenule, timpul de calcul este redus simţitor, combinaţiile de date care corespund unor arce (muchii) sau lanţuri (drumuri) care nu există în graf nefiind luate în calcul în mod automat;
- în al treilea rând, dacă graful considerat este neorientat calculele se pot reduce şi mai mult luându-se în considerare nu întreaga matrice de adiacenţă ci doar triunghiul superior al acesteia, atunci când se construieşte matricea rară asociată, deoarece este cunoscut că această matrice de adiacenţă este simetrică, pentru grafurile neorientate.

Bibliografie

[AR83] **N. Andrei, C. Răsturnoiu** - *Matrice rare şi aplicaţiile lor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983

[BK04] **G. D. Bolog, T. M. Karnyanszky** - *Optimizarea traseelor de transport rutier*, Anale. Seria Informatică, vol. II, fasc. II: 75-82, Editura Mirton, Timişoara, 2004

[D+93] **V. Dragomir et all** - *România. Atlas turistic şi rutier*, Editura Flomarco, Bucureşti, 1993

[Ion73] **T. Ionescu** - *Grafuri. Aplicaţii*, vol. I şi II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973

[Kar04] **T. M. Karnyanszky** - *Algoritmica grafurilor*, ediţia a II-a, Editura Mirton, Timişoara, 2004

[Pop00] **P. Popovici** - *Structuri de date liniare şi arborescente*, Editura Eubeea, Timişoara, 2000

[***03] Institutul Naţional de Statistică – *Anuarul statistic al României 2002*, Bucureşti, 2003