Proprietăți ale familiilor de limbaje contextuale

Lector dr. Florin Fortiş
Universitatea de Vest, Timişoara
Asistent Alexandra Fortiş
Universitatea "Tibiscus", Timişoara

Abstract. In this paper we are studying the properties for some families of contextual languages with catenation. The study concerns some classical properties (see [13]) for contextual languages and some new properties characteristic to these families of languages. The results in this paper continue the work from [7]. Using these properties we will be able to establish some necessary conditions and pumping properties for families of contextual languages with catenation.

1 Introducere

În definiția originală a gramaticilor contextuale selective, $G=(V,A,C,\varphi)$, limbajul generat este definit ca fiind cel mai mic limbaj satisfăcând următoarele proprietăți:

1. fiecare cuvânt din A se găseşte în L(G);
2. pentru fiecare cuvânt $x \in L(G)$ şi pentru un cuvânt $z \in L(G)$ şi un context $(u,v) \in \varphi(x)$, cuvintele uxv, xz, zx se găsesc de asemenea în L(G).

În acest mod, definiția poate fi utilizată pentru a oferi suportul pentru modelarea unor construcții elaborate în limbajele naturale. Prin introducerea operației de concatenare, alături de operația de utilizare a contextelor, pot fi obținute construcții mai complexe, urmând modelul de formare a propozițiilor, frazelor sau textelor.

Noile dispozitive generative, gramatici contextuale cu concatenare, sunt utilizate pentru a extinde puterea generativă a dispozitivelor clasice, gramatici contextuale (Marcus) (vezi [For00a], [For01b], [For01c], [For01d], [Pău82]).

Această lucrare realizează o investigare a capacității generative a gramaticilor contextuale cu concatenare, completând rezultatele deja prezentate în lucrarea [For01d].

În cele ce urmează, vom trece în revistă câteva dintre proprietățile familiilor de limbaje contextuale investigând modul în care aceste proprietăți sunt satisfăcute de către diferitele clase de limbaje contextuale cu concatenare. Aceste rezultate ne pot ajuta să stabilim mai departe relațiile dintre familiile de limbaje contextuale cu concatenare şi alte familii de limbaje contextuale.

Pentru fiecare dintre aceste proprietăți vom reaminti enunțul acesteia înainte de a analiza felul în care diferitele familii de limbaje cu concatenare satisfac această proprietate.

2 Proprietăți ale familiilor de limbaje contextuale

2.1 Proprietatea EBS

Definiția 2.1. *Spunem că un limbaj* $L \subset V^*$ *are proprietatea EBS dacă există o constantă întreagă* p *astfel încât pentru fiecare cuvânt* $x \in L$ *cu* $|x| > p$ *există un cuvânt* $y \in L$ *astfel încât* $x = uyv$ *şi* $0 < |uv| \leq p$.

Proprietatea EBS caracterizează limbajele ECC. În ceea ce priveşte familiile de limbaje contextuale cu concatenare, au loc următoarele rezultate:

Lema 2.1. *Familia* $CCON$ *nu posedă proprietatea* EBS.

Demonstrație. Fie gramatica CCON $G = (\{a,b\}, \{\lambda\}, \{(a,b)\})$. Această gramatică generează limbajul $D_{\{a,b\}}$ (limbajul Dyck peste alfabetul $\{a,b\}$).

Limbajul $D_{\{a,b\}}$ nu posedă însă proprietatea EBS. Într-adevăr, dacă acest limbaj ar poseda proprietatea EBS ar trebui să fie limbaj ECC. Fie G_e o gramatică ECC care generează acest limbaj.

Să considerăm cuvinte de forma $a^{mq}b^{mq}(a^q b^q)^m$, cu $m, q > 0$, destul de mari. Mulțimea contextelor acestei gramatici va conține cel puțin contextele $(a,b), (\lambda, ab)$ şi (ab, λ). În generarea cuvintelor de forma de mai sus însă, contextele anterioare nu vor fi suficiente. Astfel, pentru a obține cuvântul

$x = a^6 b^6 (a^2 b^2)^3$ va trebui să utilizăm un context de forma $(\lambda, aabb)$, pe lângă contextele deja existente.

Mai mult, pentru a deriva un cuvânt de forma $a^{mq} b^{mq} (a^q b^q)^m$, cu $m, q > 0$ va trebui să folosim un context de forma $(\lambda, a^q b), q > 0$. Prin urmare, dacă limbajul $D_{\{a,b\}}$ este ECC, mulțimea contextelor gramaticii ECC care-l generează este infinită.

Remarca 2.1. *Deoarece proprietatea EBS caracterizează familia ECC, urmează că familiile CCON şi ECC sunt incomparabile.*

Dată fiind definiția limbajelor CCON(F), urmează că are loc incluziunea şi, mai mult, această incluziune este strictă.Acest rezultat poate fi extins şi pentru celelate familii de limbaje contextuale cu concatenare avute în vedere în această lucrare.

Teorema 2.1. *Niciuna dintre familiile CCON$_\omega$, CSEL$_\omega$, (F)BCCON$_\omega$, pentru $\omega \in \{in, ex\}$ nu posedă proprietatea EBS.*

2.2 Proprietatile EBSC, LEBSC

Rezultatele negative din secțiunea precedentă se datorează faptului că în derivarea cuvintelor dintr-un limbaj contextual cu concatenare este posibilă şi utilizarea operației de concatenare.

În această situație, în mod firesc, putem introduce următoarele proprietăți:

Definiția 2.2. *Spunem că un limbaj L posedă proprietatea EBSC dacă există o constantă întreagă p astfel încât pentru fiecare cuvânt $x \in L$, cu $\lg(x) > p$ există cuvintele $y, z \in L \cup \{\lambda\}$ astfel încât $x = uyzv$ ($uzyv$, respectiv), $\lg(uzv) > 0$, $\lg(uv) \le p$ şi $\lg(yz) > 0$.*

Spunem că un limbaj L posedă proprietatea LEBSC dacă există o constantă întreagă p astfel încât pentru fiecare cuvânt $x \in L$, cu $\lg(x) > p$ există cuvintele $y, z \in L \cup \{\lambda\}$ astfel încât $x = uyzv$, ($uzyv$, respectiv), $0 < \lg(uzv) \le p$ şi $\lg(yz) > 0$.

Remarca 2.2. *Proprietatea EBS pune în evidență posibilitatea utilizării contextelor într-o manieră exterioară. În plus față de aceasta, proprietatea EBSC pune în evidență şi posibilitatea utilizării concatenărilor în manieră exterioară.*

Lema 2.2. *Orice limbaj CSEL, CCON(F) sau FBCCON(F) posedă proprietatea EBSC.*

Demonstrație. Fie L un limbaj CSEL, x un cuvânt din L şi constanta p definită astfel

$$p = 2 \cdot \max\{\max_{a \in A}\{\lg(a)\}, \max_{(u,v)\in C}\{\lg(uv)\}\}$$

astfel încât $\lg(x) > p$. Atunci x este de una din formele

1. $x = ux_1v$ cu $(u,v) \in C, x_1 \in L$. Alegem $y = x_1, z = \lambda$
2. $x = x_1x_2$ cu $x_1, x_2 \in L$. Alegem $y = x_1, z = x_2$ iar $(u,v) = (\lambda, \lambda)$.

În ambele cazuri sunt verificate condițiile proprietății EBSC, prin urmare limbajul L posedă proprietatea EBSC.

Printr-un raționament similar putem deduce că proprietatea EBSC este satisfăcută şi de către limbajele familiilor CCON(F) şi FBCCON(F).

Remarca 2.3. *Orice limbaj L care posedă proprietatea EBS posedă şi proprietatea EBSC. Reciproca însă nu este adevărată.*

Observăm că, pe baza rezultatului din **Lema 2.2**, fiecare limbaj CSEL posedă proprietatea EBSC. Prin urmare, limbajul $D_{\{a,b\}}$ posedă proprietatea EBSC, însă acest limbaj nu posedă proprietatea EBS.

De asemenea, are loc

Remarca 2.4. *Orice limbaj L care posedă proprietatea LEBSC posedă şi proprietatea EBSC.*

Ținând seama de rezultatul anterior, urmează că orice limbaj ECC este CSEL. În plus, incluziunea este strictă.

Lema 2.3. *Nici una dintre familiile de limbaje ICC, $CSEL_{in}$, $FBCCON_{in}(F)$ nu posedă proprietatea EBSC.*

Demonstrație. Pentru a demonstra acest rezultat, este suficient să considerăm limbajul ICC

$$L = \{a^n b^n c \mid n \geq 0\}$$

Acest limbaj nu poate posedă proprietatea EBSC (de fapt, nu posedă nici măcar proprietatea EBS). Limbajul L fiind ICC este de asemenea $CSEL_{in}$ ($CSEL_{in}$(FIN), $FBCCON_{in}$(FIN), respectiv).

Mai mult, putem stabili următorul rezultat:

Lema 2.4. *Un limbaj este CSEL dacă şi numai dacă posedă proprietatea EBSC.*

Demonstrație. Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj care posedă proprietatea EBSC pentru o constantă întreagă pozitivă, p. Construim gramatica CSEL, $G = (V, A, C, \varphi)$, unde

$$A = \{x \in L \mid \lg(x) \le p\}$$
$$C = \{(u,v) \mid u,v \in V^*, 0 < \lg(uv) \le p\}$$
$$\varphi(x) = \{(u,v) \in C \mid uxv \in L\}, x \in V^*$$

Pentru cuvinte de forma xz cu $z \in L$, adăugăm la mulțimea $\varphi(xz)$, construită ca mai sus, contextul (λ,λ), dacă $xz \in L$, cu $x \in V^*$.
Folosind definițiile pentru A, C şi φ, egalitatea $L = L(G)$ este imediată.

2.3 Proprietatea IBS

Definiția 2.3. *Un limbaj* $L \subseteq V^*$ *posedă proprietatea IBS dacă există o constantă p astfel încât pentru fiecare cuvânt* $x \in L$, *cu* $\lg(x) > p$, *există un cuvânt* $y \in L$ *astfel încât* $x = x_1ux_2vx_3$, $y = x_1x_2x_3$ *şi* $0 < \lg(u,v) \le p$.

Un limbaj $L \subseteq V^*$ *posedă proprietatea BLI dacă există o constantă p astfel încât pentru fiecare* $x \in L$, *cu* $\lg(x) > p$ *există un cuvânt* $y \in L$ *cu* $0 < \lg(x) - \lg(y) \le p$.

Proprietatea IBS caracterizează limbajele TC. În ceea ce priveşte familiile de limbaje contextuale cu concatenare, au loc rezultatele:

Lema 2.5. *Familia CCON posedă proprietatea IBS.*
Demonstrație. Pentru un limbaj $L \in CCON$ alegem o valoare
$$p = 3 \cdot \max\{\max_{a \in A}\{\lg(a)\}, \max_{(u,v)\in C}\{\lg(uv)\}\}$$
Un cuvânt $x \in L$ cu $\lg(x) > p$ este de una din formele

1. $x = u_1u_2\ldots u_nv_n\ldots v_2v_1$. Alegem $u = u_i, v = v_i$ cu $1 \le i \le n$. Cuvântul $y = u_1\ldots u_{i-1}u_{i+1}\ldots u_nav_n\ldots v_{i+!}v_{i-1}\ldots v_1$ este de asemenea în L şi $0 < \lg(uv) \le p$.
2. $x = u_1x_1x_2v_2$ cu $u_1, x_1, v_1, x_2 \in L$. Analizăm mai departe cuvântul x_2. Dacă forma acestui cuvânt este cea de la punctul 1, vom găsi imediat şirurile u, v, y satisfacând condițiile proprietății IBS; altfel continuăm analiza cu un subşir al şirului x_2, fie acesta $x_2^{(1)} \in L$. După un număr finit de paşi vom putea eventual identifica cuvintele $x_2^{(k)}, x_2^{(k+1)} \in L$, cu $x_2^{(k+1)} \in Sub(x_2^{(k+1)})$ şi $0 < \lg(x_2^{(k+1)}) \le p$. În această situație alegem $u = x_2^{(k+1)}$ şi $v = \lambda$. Cuvântul y obținut prin

eliminarea subşirului $x_2^{(k+1)}$ din cuvântul x este de asemenea în L şi $0 < \lg(u,v) \le p$.

Cu toate acestea, controlul impus atât asupra aplicării de contexte cât şi asupra operației de concatenare ne conduce la rezultatul

Lema 2.6. *Familia CSEL nu posedă proprietatea IBS.*
Demonstrație. Pentru a demonstra acest rezultat, considerăm limbajul

$$L = \{a^{2^n} \mid n \ge 0\}$$

Acest limbaj este generat de gramatica CSEL următoare

$$G = (\{a\}, \{a\}, \varphi)$$

unde $\{(\lambda,\lambda)\} \subseteq \varphi(a^{2^m})$ pentru $m \ge 1$. Acest limbaj nu este cu creştere în lungime mărginită, deoarece diferența dintre lungimile a două cuvinte consecutive este $2^k - 2^{k-1}$, pentru $k > 0$. Prin urmare familia CSEL nu posedă proprietatea IBS.

Remarca 2.5. *Rezultatul din* ***Lema 2.6*** *pune în evidență faptul că există limbaje CSEL care nu sunt TC. De fapt, familiile TC şi CSEL sunt incomparabile.*

De asemenea, $CCON \subseteq TC$. Mai mult, această incluziune este strictă.

Folosind demonstrația de mai sus putem formula următoarea

Lema 2.7. *Familia CSEL nu posedă proprietatea BLI.*
Demonstrație. Este de ajuns să observăm că demonstrația **Lemei 2.6** se bazează pe faptul că proprietatea IBS implică proprietatea BLI. De asemenea, pentru putem realiza o construcție similară cu cea pentru CCON în scopul obținerii unui rezultat asemănător, prin urmare

Lema 2.8. *Familia posedă proprietatea IBS .*

2.4. Proprietățile IBSC şi LIBSC

Întocmai ca în cazul proprietății EBS, vom introduce două noi proprietăți, adaptate la tipurile noi de dispozitive generative studiate

Definiția 2.4. *Spunem că un limbaj L are proprietatea IBSC dacă există un întreg pozitiv p astfel încât pentru $x \in L$ cu $\lg(x) > p$, există cuvintele $y, z \in L \cup \{\lambda\}$, unde $x = x_1ux_2zvx_3$ (sau $x = x_1uzx_2vx_3$), $y = x_1x_2x_3$ iar $\lg(uzv) > 0$ şi $\lg(uv) \le p$*

De asemenea, putem introduce versiunea cu concatenare limitată a proprietății IBSC după cum urmează

Spunem că un limbaj L are proprietatea LIBSC dacă există un întreg pozitiv p astfel încât pentru $x \in L$ cu $\lg(x) > p$, există cuvintele $y, z \in L \cup \{\lambda\}$, unde $x = x_1 u x_2 z v x_3$ (sau $x = x_1 u z x_2 v x_3$), $y = x_1 x_2 x_3$ iar $0 < \lg(uzv) \leq p$.

Pornind de la definiția proprietății IBSC urmează că

Lema 2.9. *Familiile $CCON_{in}, CSEL_{in}$ posedă proprietatea IBSC.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $x \in L$ cu $\lg(x) > p$, cu p valoare întreagă pozitivă convenabil aleasă pentru un limbaj $L \in CSEL_{in}$, urmează că

$$x = x_1 u x_2 v x_3 \text{ cu } x_1 x_2 x_3 \in L, (u, v) \in C \text{ sau}$$
$$x = x_1 x_2 z x_3 \text{ cu } x_1 x_2 x_3 \in L, z \in L$$
$$x = x_1 z x_2 x_3 \text{ cu } x_1 x_2 x_3 \in L, z \in L$$

Prin urmare limbajul $L \in CSEL_{in}$ posedă proprietatea IBSC. Valoarea p poate fi aleasă ca fiind

$$p = \max\{\max_{a \in A}\{\lg(a)\}, \max_{(u,v) \in C}\{\lg(uv)\}\}$$

Lema 2.10. *Fiecare dintre proprietățile LIBSC şi IBSC implică proprietatea IBS.*

Remarca 2.6. *Fie L un limbaj $CSEL_{in}$ pentru care în orice derivare*

$$x \Rightarrow y \text{ cu } y = x_1 x_2 z x_3 \text{ (sau } x_1 z x_2 x_3\text{)}$$

are loc $\lg(z) \leq p$, unde p este o valoare întreagă pozitivă. Atunci acest limbaj posedă proprietatea LIBSC.

Remarca 2.7. *Fiecare limbaj $CSEL_{in}$ care satisface proprietatea LIBSC este ICC.*

Demonstrație. Pentru un limbaj $L \in CSEL_{in}$ satisfăcând proprietatea LIBSC, concatenările posibile într-o derivare a unui cuvânt $x \in L$ sunt doar cu cuvinte de lungime mai mică decât o valoare întreagă p, prin urmare mulțimea acestor cuvinte este finită. Adăugăm mai departe contextele de forma (λ, z) şi (z, λ), $z \in V^*$ cu $\lg(z) \leq p$, la mulțimea contextelor C.

De asemenea, modificăm funcția de selecție, φ, astfel încât dacă $(\lambda, \lambda) \in \varphi(xz)$ să avem că $(\lambda, z) \in \varphi(x)$.

2.5 Proprietatile mix, Mix

Definiția 2.5. *Un limbaj* $L \subseteq V^*$ *cu* $card(V) \geq 2$ *posedă proprietatea mix dacă există constanta p astfel încât dacă există* $a, b \in V$, $a \neq b$ *și* $x, y \in L$ *cu* $N_a(x) > p, N_b(y) > p$, *atunci pentru fiecare* $n \geq 1$ *există un* $z_n \in L$ *cu* $N_a(z_n) \geq n$ *și* $N_b(z_n) \geq n$.

Un limbaj $L \subseteq V^*$ cu $card(V) \geq 2$ posedă proprietatea *Mix* dacă există constanta p astfel încât dacă există $a, b \in V$, $a \neq b$ şi $x, y \in L$ cu $N_a(x) > p, N_b(y) > p$ atunci pentru fiecare $n \geq 1$ există un $z_n \in L$ care se poate scrie sub forma $z_n = x_1 x_2 \ldots x_n$, cu $x_i = x_{i,1} a x_{i,2} b x_{i,3}$; pentru $1 \leq i \leq n$.

Lema 2.11. *Familia CCON posedă fiecare dintre proprietățile mix și Mix.*
Demonstrație. Să considerăm o gramatică CCON, $G = (V, A, C)$. Fie $p = \max\{\lg(w) \mid w \in A\}$. Fie mai departe $x, y \in L(G)$ astfel încât $N_a(x) > p$, $N_b(y) > p$. Există contextele $(u, v), (u_1, v_1)$, astfel încât $N_a(uv) > 0$ şi $N_b(u_1 v_1) > 0$ (eventual chiar $(u, v) = (u_1, v_1)$). Utilizând aceste contexte arbitrar, se pot obține cuvinte conținând oricât de multe apariții ale simbolurilor a și b.

Mai mult, posibilitatea utilizării operației de concatenare în derivarea cuvintelor ne asigură că familia CCON posedă şi proprietatea *Mix*. Totuşi, ținând seama de faptul că limbajul $a^+ \cup b^+$ este CSEL urmează că

Lema 2.12. *Niciuna dintre familiile CSEL, (F)BCCON nu posedă nici una dintre proprietățile mix sau Mix.*

2.6 Proprietatea IAP

Definiția 2.6. *Un limbaj* $L \subseteq V^*$ *posedă proprietatea IAP dacă mulțimea lungimilor cuvintelor sale conține o progresie aritmetică infinită.*

Lema 2.13. *Familia CSEL nu posedă proprietatea IAP.*
Demonstrație. Vom considerăm mulțimile

$$L_k = \{a^i \mid 2^{2k+1} \leq i \leq 2^{2(k+1)}\}$$

Limbajul $L = \bigcup_k L_k$ este CSEL însă nu posedă proprietatea IAP.

Aşa cum este însă de aşteptat are loc următoarea **Lemă**

Lema 2.14. *Familiile CCON, $CCON_{in}$, FBCCON posedă proprietatea IAP. Familiile $CSEL_{in}$, $FBCCON_{in}$ posedă proprietatea IAP.*

Demonstrație. Este suficient pentru început să considerăm un cuvânt $x \in L$, unde L este un limbaj CCON (sau $CCON_{in}$). Atunci fiecare dintre cuvintele $\underbrace{x \dots x}_{m}$, cu $m \geq 1$, se găseşte de asemenea în limbajul L.

Să observăm de asemenea că ne este furnizeazată aici încă o informație deosebit de importantă pentru familia CSEL: familia CSEL nu posedă nici un fel de proprietăți de pompare.

2.7 Proprietatea Min

Definiția 2.7. *Pentru un limbaj $L \subseteq V^*$ notăm*

$$Min_0(L) = \{x \in L \mid PSub(x) \cap L = \phi\}$$

$$Min_i(L) = Min_{i-1}(L) \cup Min_0(L - Min_{i-1}(L)),\ pentru\ i \geq 1.$$

Să considerăm următoarea gramatică contextuală cu concatenare,

$$G = (\{a,b\}, \{ab\} \{(a,\lambda), (\lambda,b)\}).$$

Atunci limbajul generat de această gramatică este $L(G) = \{a^n b^m \mid n,m \geq 1\}^+$. Observăm că acest limbaj este CCON dar şi $CSEL_{in}$. Putem atunci enunța următorul rezultat

Lema 2.15. *Nici una dintre familiile CCON, CSEL, $CSEL_{in}$ nu posedă proprietatea Min.*

Demonstrație. Pentru a demonstra aceasta este suficient să arătăm că mulțimea $Min_0(L(G))$ este infinită pentru limbajul generat de gramatica de mai sus. Pentru aceasta, vom observa că are loc relația $\{ab^n a^m b \mid m,n \geq 1\} \subset L(G)$. Pentru fiecare cuvânt x de forma $ab^n a^m b$, subcuvintele proprii sunt de forma $b^p a^q$, $p,q \geq 0$, prin urmare pentru orice cuvânt x de forma $ab^n a^m b$ are loc $PSub(x) \cap L(G) = \phi$.

Aşadar $\{b^n a^m \mid n,m \geq 0\} \subseteq Min_0(L)$, deci mulțimea $Min_0(L)$ este infinită.

Pentru gramaticile $CCON_{in}$, limbajul generat de gramatica anterioară este

$$L_{in}(G) = \{a\} \{a,b\}^* \{b\}$$

Nici acest limbaj nu se bucură de proprietatea *Min*. Pentru aceasta este suficient să considerăm cuvinte de forma $ab^n a^m b, m,n \geq 1$. Fie x un cuvânt de forma $ab^n a^m b$. Atunci orice subcuvânt propriu al acestui cuvânt este de una din formele b^n, $b^n a^m$, a^m, prin urmare $PSub(x) \cap L_{in}(G) = \phi$ pentru fiecare cuvânt x de forma $ab^n a^m b, m, n \geq 1$. Aceasta ne indică faptul că rezultatul pentru familia $CCON_{in}$ este

Lema 2.16. *Familia $CCON_{in}$ nu posedă proprietatea Min*.

Bibliografie

[For98] **F. Fortiş**, *On Fully Bracketed Languages with Finite Selection*, 11th ROmanian SYmposium on Computer Science (ROSYCS' 98), Iaşi, 1998.

[For00a] **F. Fortiş**, *Contextual Grammars with Catenation. Closure Properties*, Ann. Univ. Timişoara, 38, 2 (2000), 80 – 95, ISSN 1224-97-0x

[For00b] **F. Fortiş**, *Are FBICC(FIN) languages context-free?* Second Workshop on Symbolic and Numerical Algorithms for Scientific Computation, SYNASC'2000, Timişoara, 4—7 Oct. 2000

[For01a] **F. Fortiş**, *FBICC(FIN) in the Chomsky Hierarchy*, Ann. Univ. Timişoara, 39, 1, 2001

[For01b] **F. Fortiş**, *Contextual Grammars with Catenation. Generative Capacity*, Ann. Univ. Timişoara, 39, 2 2001

[For01c] **F. Fortiş**, *Results of Decidability for Contextual Grammars with Catenation*, Ann. Univ. Timişoara, 39, 2, 2001

[For01d] **F. Fortiş**, *On the generative capacity of contextual grammars with catenation*, Informatica, Lithuania, 10, 2, 2001

[Mar69a] **S. Marcus**, *Contextual grammars*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 14, 1969

[Mar69b] **S. Marcus**, *Deux types nouveaux de grammaires generatives*, Cah. Ling. Th. Appl., 6, 1969

[M-VP98] **C. Martin-Vide, Gh. Păun**, *Structured contextual grammars*, Grammars, 1, 1, 1998

[Pău79a] **Gh. Păun**, *Marcus' contextual grammars and languages. A survey*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 24 (1979), 1467 – 1486.

[Pău79b] **Gh. Păun**, *On a prolongation operation of languages*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 23(71), 1979

[Pău82] **Gh. Păun**, *Contextual Grammars*, Editura Academiei, 1982