

Corpul rigid liber ca sistem mecanic hamiltonian

Asistent Alexandra Fortiș
Universitatea “Tibiscus”, Timișoara
Lector dr. Florin Fortiș
Universitatea de Vest, Timișoara

Abstract. This research presents an approach of hamiltonian mechanics, built on the phases space of a mechanical system. We are introducing the differential structure for the free rigid body defined by Euler’s angles. The stability of the solution is explained in Poincaré-Lyapunov formulation. The hamiltonian system for a free rigid body is characterised using the Hurwitz criterion and the phase portret, providing a mathematical model easier to analyse.

1 Introducere

Prin corp solid rigid sau indeformabil se înțelege un mediu material pentru care distanța dintre oricare două puncte ale sale rămâne invariantă în timp, oricare sunt forțele care se exercită asupra acestui mediu sau oricare ar fi mișcarea sa. Altfel spus, nu au loc deplasări între diferitele părți care alcătuiesc rigidul, ci doar mișcări ale întregului ansamblu.

De fapt, corpul rigid este o abstracție matematică, în realitate corpurile solide fiind mai mult sau mai puțin deformabile. Totuși, o parte dintre acestea pot fi considerate ca și corpuri rigide dacă forțele care acționează asupra lor nu depășesc anumite limite.

2 Modelarea matematică a rigidului liber

Din punct de vedere al modelării matematice, corpul rigid liber este un sistem mecanic hamiltonian, invariant la stânga, pe $T^*SO(3)$, unde spațiul

configurațiilor, $SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = I_3, \det A = 1\}$ reprezintă grupul transformărilor ortogonale pe \mathbb{R}^3 . Spațiul fazelor acestui sistem este varietatea cotangentă $T^*SO(3)$. Structura diferențială pe $SO(3)$ este definită folosind unghiurile lui Euler $\{\phi, \psi, \theta\}$.

Pentru a prezenta modul în care sunt puse în evidență aceste unghiuri, vom considera baza canonică din \mathbb{R}^3 : $\{e_1, e_2, e_3\}$ asociată reperului ortogonal $Oxyz$. Inițial se efectuează o rotație de unghi ϕ în jurul axei Oy , noua bază fiind $\{f_1, f_2, f_3\}$, pentru reperul $Ox'y'z'$, cu matricea de trecere

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Urmează o rotație de unghi ψ în jurul axei Oz' cu matricea de trecere spre un nou reper $Ox_1y_1z_1$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

precum și o rotație de unghi θ în jurul axei Ox_1 , caracterizată prin matricea

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Acest nou sistem de coordonate $Ox_1y_1z_1$ va fi identificat prin baza $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\} \subset \mathbb{R}^3$.

Compunerea celor trei rotații (a celor trei schimbări de reper) coincide cu trecerea de la baza B la baza B^* și corespunde produsului matricilor de trecere T_1, T_2, T_3 . Prin urmare, matricea de trecere de la baza B la baza B^* va fi ortogonală: $T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$. O hartă locală

$$\mathbb{R}^3 \ni \{\phi, \psi, \theta\} \mapsto t \in SO(3)$$

cu

$$T = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

unde $0 < \phi, \psi < 2\pi$ și $0 < \theta < \pi$.

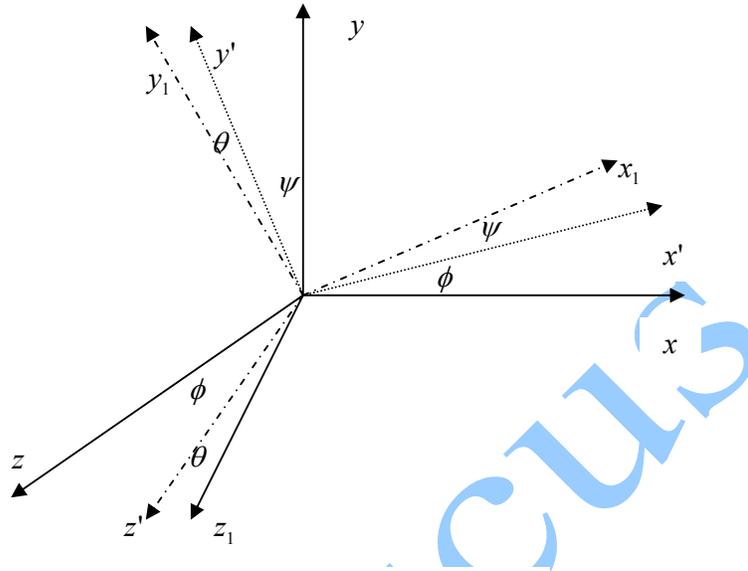


Figura 1. Unghiurile lui Euler

În cazul corpului rigid liber, sistemul hamiltonian (M, ω, H) este dat de

$$\begin{aligned} M &= T^*SO(3) \\ \omega &= dp_\phi \wedge d\phi + dp_\psi \wedge d\psi + dp_\theta \wedge d\theta \\ H &= \frac{1}{2} \frac{[(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \sin \psi + p_\theta \sin \theta \cos \psi]^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{[(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \psi - p_\theta \sin \theta \sin \psi]^2}{I_2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_3} \end{aligned}$$

unde p_ϕ, p_θ, p_ψ reprezintă momentele conjugate corespunzătoare lui ϕ, θ, ψ iar I_1, I_2, I_3 sunt momentele de inerție despre care presupunem că $I_1 \geq I_2 \geq I_3 > 0$. În aceste condiții, ecuațiile lui Hamilton pentru corpul rigid liber sunt:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} & \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\psi} & \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} & \dot{p}_\psi &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} & \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{aligned}$$

3 Stabilitate

Poincaré și Lyapunov au ajuns la concluzia că, în cazul unor sisteme dinamice la care nu se cunoaște legea dinamică de evoluție, se pot determina stările succesive, adică este urmată o soluție fixă, sistemul stabilizându-se după ce condițiile inițiale și-au pierdut influența.

Problema Cauchy

$$\dot{x} = v(x, t)$$

are o soluție care depinde de condițiile inițiale. Problema care apare se referă la dependența soluției în cazul în care t variază într-un interval compact de forma $[t_0, \infty)$. Soluția $x = \varphi(t)$ este stabilă spre $+\infty$ în sens Poincaré-Lyapunov dacă prin variații mici produse asupra datei inițiale x_0 se produc, de asemenea, variații mici asupra soluției corespunzătoare. Cu alte cuvinte, $\forall \varepsilon \in R$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $\bar{x}_0 \in R^n$ și $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta(\varepsilon)$, rezultă că soluțiile $\bar{\varphi}(t) = \bar{x}_0$ la momentul t_0 și $\varphi(t) = x_0$ la momentul t_0 satisfac egalitatea $|\bar{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \forall t \in [t_0, \infty)$.

Cele de mai sus pot fi interpretate în sensul că prin variația cu cel mult δ a datei inițiale x_0 , soluția va fi situată în zona determinată de $(\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon)$. Din punct de vedere grafic, interpretarea stabilității este redată în figura următoare.

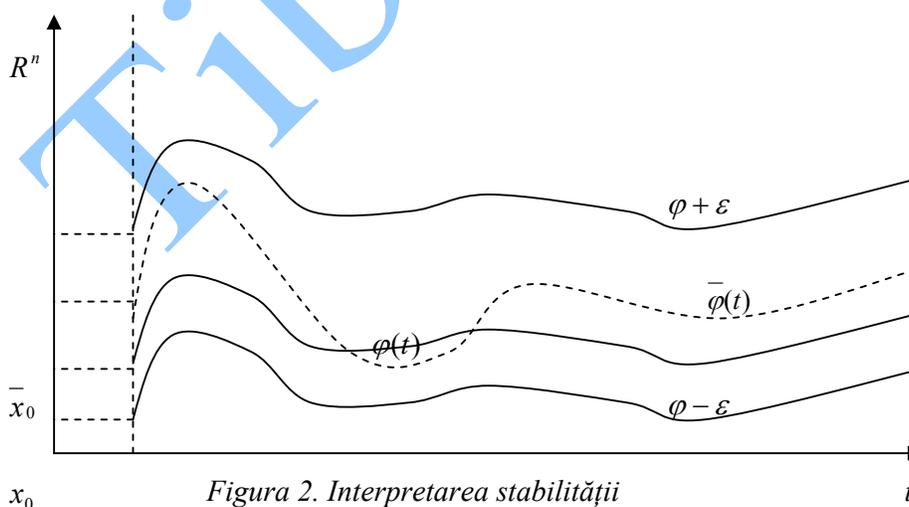


Figura 2. Interpretarea stabilității

Noțiunea de stabilitate în sensul lui Lyapunov poate fi interpretată și în alt mod, prin studiul soluției unui sistem care descrie matematic un fenomen. Se presupune că, la un moment dat, intervin perturbații de scurtă durată care nu sunt cunoscute exact și deci nu pot fi modelate matematic. După un anumit timp aceste perturbații își încetează activitatea și fenomenul va putea fi caracterizat prin același sistem care îl modela înainte de apariția perturbațiilor. În esență, sub influența perturbațiilor, fenomenul a fost modificat și valoarea corespunzătoare momentului încetării acțiunii perturbațiilor va fi una diferită de soluția considerată la început.

Deci, în astfel de cazuri, efectul unor perturbații poate fi interpretat drept trecerea sistemului de la o soluție cu anumite condiții inițiale la una cu alte condiții inițiale, al cărui moment de plecare este cel în care perturbațiile nu mai acționează asupra fenomenului.

4 Criteriul lui Hurwitz

Se consideră ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, P, Q \in C^1(D), P, Q: D \subset R^2 \rightarrow R$$

Fie x_0 și y_0 punctele în care se anulează simultan polinoamele P respectiv Q . Acestea vor fi punctele singulare ale ecuației diferențiale, precum și puncte de echilibru pentru sistemul diferențial

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Inițial se efectuează o translație de forma

$$\begin{cases} x \mapsto x - x_0 \\ y \mapsto y - y_0 \end{cases}$$

care conduce la studiul stabilității soluției banale. Astfel, dacă

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

cu $ad - bc \neq 0$ reprezintă liniarizarea sistemului (1), comportarea soluțiilor sistemului liniarizat, în vecinătatea originii, se încadrează într-una dintre următoarele posibilități, analizând tipul rădăcinilor ecuației caracteristice $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$.

- a. Dacă rădăcinile sunt reale și distincte
- Dacă $x_1 < 0, x_2 < 0$ atunci originea este punct de echilibru asimptotic stabil, numit nod bidirecțional stabil
 - Dacă $x_1 > 0, x_2 > 0$ atunci originea este punct de echilibru instabil numit nod bidirecțional instabil
 - Dacă $x_1 < 0, x_2 > 0$ atunci originea este punct de echilibru instabil
- b. Dacă rădăcinile sunt egale
- c. Dacă $x_1 = x_2 < 0$ atunci originea este punct de echilibru asimptotic stabil numit nod unidirecțional stabil
- d. Dacă $x_1 = x_2 > 0$ atunci originea este punct de echilibru instabil, numit nod unidirecțional instabil
- e. Dacă rădăcinile sunt complexe, de forma $x_{1,2} = p \pm iq$ atunci
- f. Dacă $p < 0$ originea este focar stabil
- g. Dacă $p > 0$ originea este focar instabil
- h. Dacă $p = 0$ originea este centru.

Clasificarea mai poate fi interpretată și astfel: în cazul punctelor de echilibru asimptotic stabil, deplasarea pe traiectorii se face către origine, în timp ce în cazul punctelor de echilibru instabil, deplasarea pe traiectorii se efectuează dinspre originea sistemului de axe.

5 Portretul fazelor și stabilitatea

Se consideră sistemul hamiltonian neliniar

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial x_{n+i}} \\ \dot{x}_{n+i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad (2)$$

cu $H \in C^\infty : R^{2n} \rightarrow R$.

Propoziție. Originea este soluție de echilibru a sistemului (2); dacă $H(x_1, \dots, x_{2n}) - H(0, \dots, 0)$ este pozitiv sau negativ definită într-o vecinătate a originii, atunci originea este neliniar stabilă.

Se consideră $\dot{x} = f(x)$, $x_e \in V$ cu $f \in C^1$, $f : W \subset R^n \rightarrow R^n$.

Teorema. (I a lui Lyapunov) Fie o aplicație $V : U \rightarrow R$ unde $U \subset W$ este o vecinătate a punctului de echilibru $x_e \in V$ astfel încât $V \in C^1$. Dacă

1. $V(x_e) = 0, V(x) > 0, \forall x \neq x + e$
2. $\dot{V} \leq 0$, unde \dot{V} reprezintă derivata lui V de-a lungul traiectoriilor sistemului,

atunci x_e este stabil. În cazul în care $\dot{V} < 0$, atunci x_e este asimptotic stabil.

6 Corpul rigid liber

Sistemul hamiltonian care îl modelează are forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3, a_1, a_3 > 0, a_2 < 0 \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases}$$

Punctele de echilibru ale sistemului sunt $e_1 = (M, 0, 0), e_2 = (0, M, 0)$ și $e_3 = (0, 0, M)$. Cu metoda funcției lui Lyapunov se verifică stabilitatea pentru e_1 , urmând a se proceda similar pentru celelalte puncte. Fie

$V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin relația $V(x_1, x_2, x_3) = (a_1 x_2^2 - a_2 x_1^2 + a_3 M^2)^2 + a_3 x_2^2 - a_2 x_3^2$. Se verifică condițiile:

$$V(M, 0, 0) = 0, V(x_1, x_2, x_3) > 0$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \dot{x}_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 = (4a_2^2 x_1^3 - 4a_1 a_2 x_1 x_2^2 - 4a_2^2 M^2 x_1)(a_1 x_2 x_3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = (4a_1^2 x_2^3 - 4a_1 a_2 x_1^2 x_2 + 4a_1 a_2 M^2 x_2 + 2a_3 x_2)(a_2 x_1 x_3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} \dot{x}_3 = (-2x_3 a_2)(a_3 x_1 x_2)$$

Pentru $(M, 0, 0)$ avem

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 = \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial V}{\partial x_3} \dot{x}_3 = 0$$

deci acest punct este un punct de echilibru stabil. În mod analog, se arată că și punctul $(0,0,M)$ este un punct de echilibru stabil.

Pentru cazul în care punctul de echilibru este $(0,M,0)$ se va lucra cu liniarizatul asociat sistemului

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1x_3 & a_1x_2 \\ a_2x_3 & 0 & a_2x_1 \\ a_3x_2 & a_3x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,M,0)} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Rezultă că

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1M \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3M & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic asociat este $-\lambda(\lambda^2 - a_1a_3M^2)$ cu valorile proprii $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_{2,3} = \pm M\sqrt{a_1a_3}$. Din analiza acestor valori reiese faptul că punctul $(0,M,0)$ este un punct de echilibru instabil.

7 Concluzii

Aceste rezultate permit prezentarea mecanicii hamiltoniene ca o geometrie construită pe spațiul fazelor unui sistem mecanic. Mecanica hamiltoniană este extrem de utilă în rezolvarea problemelor din fizică, permite înțelegerea caracterului general al mișcării în cadrul sistemelor complexe care au permis dezvoltarea teoriei hiperbolice, a mecanicii statistice și a mecanicii cuantice.

Bibliografie

- [BS94] **V. Brânzănescu, O. Stănășilă**, *Matematici aplicate*, Editura ALL, 1994
- [Hai65] **A. Haimovici**, *Ecuatii diferențiale și ecuații integrale*, Editura didactică și Pedagogică, București, 1965
- [Hal63] **A. Halanay**, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, Editura Academică, București, 1963

- [MH91] **K. R. Meyer, G. R. Hall**, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer-Verlag, 1991
- [Put9] **M. Puta**, *Hamiltonian Mechanical System and Geometric Quantization*, Kluwer Academic Publishers, 1993

TIBISCUS

Tibiscus