Asupra utilizării logicii fuzzy în fundamentarea procesului decizional

Mat.ec. Sorina-Carmen Luca
Anglo Romanian Bank Ldt.- Timişoara
Conf.dr. Lucian Luca, Asist. Adela Ionescu,
Universitatea „Tibiscus" Timişoara

ABSTRACT. The present study is a short introduction in the theory of the fuzzy sets. It also presents some aspects of the application of the fuzzy logics in founding the decision-making process related to the firm's management. In the end there are presented some average operators that express the idea of compromise in making a decision.

1 Introducere

Teoria mulţimilor fuzzy a fost dezvoltată începând din anii ′60, ca răspuns la insuficienta consistenţă a raţionamentelor deterministe de tipul ″DA″ sau ″NU″, încercându-se formalizarea unor raţionamente de tipul ″Mai mult sau mai puţin″.

În logica clasică, propoziţiile pot fi adevărate sau false, neexistând posibilitatea unor valori intermediare. În cazul abordării unor modele concrete, din lumea reală, s-a constatat apariţia unor situaţii delicate: nu toate sistemele reale sunt clare şi deterministe (ca atare nu pot fi descrise cu exactitate pe baza logicii clasice), iar descrierea completă a unui sistem real necesită o serie de informaţii care nu sunt cunoscute sau furnizate complet şi, de multe ori, nu sunt înţelese exact.

Astfel a apărut ca necesară utilizarea mulţimilor fuzzy şi a logicii rezultată din utilizarea mulţimilor fuzzy în locul mulţimilor clasice, crisp.

2 Mulțimi fuzzy

Definiția 1: *Fie X o mulțime nevidă. O mulțime fuzzy (vagă) A este caracterizată de către funcția sa de apartenență*

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

unde $\mu_A(x)$ este interpretată ca și gradul de apartenență al elementului x în mulțimea fuzzy A, pentru orice $x \in X$.

Este evident că A este complet determinată de către mulțimea tuplelor $A=\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ şi de aceea vom scrie frecvent $A(x)$ în loc de $\mu_A(x)$. Familia tuturor mulțimilor fuzzy în X o vom nota $\mathcal{F}(x)$. Dacă $A=\{x_1, \dots, x_n\}$ este o mulțime finită în X, vom folosi notația

$$A = \mu_1/x_1 + \dots + \mu_n/x_n$$

unde termenul μ_i/x_i, $i=1,\dots,n$ înseamnă că μ_i este gradul de apartenență al lui x_i în A, iar semnul plus reprezintă reuniunea.

Să presupunem că o persoană vrea să cumpere o maşină ieftină. "Ieftin" se poate reprezenta ca o mulțime fuzzy pe universul prețurilor. De exemplu (vezi fig.1), "ieftin" se poate interpreta:

- sub 3000 \$, maşinile se pot considera ieftine, iar prețurile nu sunt prea diferențiate în ochiul cumpărătorului;
- între 3000 \$ şi 4500 \$, o variație în preț induce o preferință uşoară (slabă) în favoarea maşinii mai ieftine;
- dincolo de 6000 \$ costurile sunt prea mari (nu ne interesează).

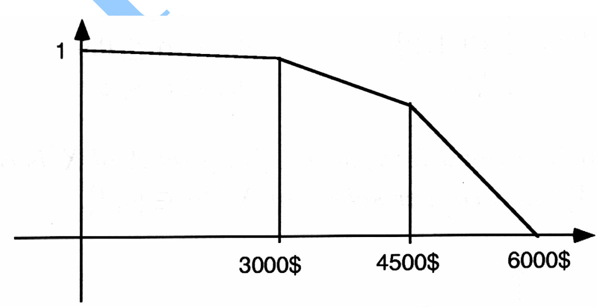

Fig.1: Funcția de apartenență discretă pentru ieftin"

Definiția 2: *O mulțime fuzzy A se numeşte număr fuzzy triunghiular cu vârful (centrul) a, lățime la stânga α > 0 şi lățimela dreapta β > 0, dacă funcția sa de apartenență are forma următoare:*

$$A(t)=\begin{cases}1-\dfrac{a-t}{\alpha}, & dacă \quad a-\alpha\le t\le a\\ 1-\dfrac{t-a}{\beta}, & dacă \quad a\le t\le a+\beta\\ 0, & altfel\end{cases}$$

şi se notează $A=(a,\alpha,\beta)$.

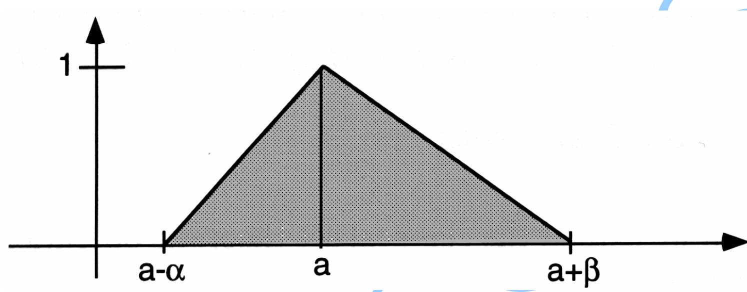

Fig.2: Număr fuzzy triunghiular

Un număr fuzzy triunghiular cu centrul *a* poate fi văzut ca şi cantitate vagă: "*x* este aproximativ egal cu *a*".

Definiţia 3: *O mulţime fuzzy A se zice număr fuzzy trapezoidal cu intervalul de toleranţă [a,b], lăţimea la stânga α şi lăţimea la dreapta β dacă funcţia sa de apartenenţă are forma următoare:*

$$A(t)=\begin{cases}1-\dfrac{a-t}{\alpha}, & dacă \quad a-\alpha\le t\le a\\ 1, & dacă \quad a\le t\le b\\ 1-\dfrac{t-a}{\beta}, & dacă \quad a\le t\le b+\beta\\ 0, & altfel\end{cases}$$

Un număr fuzzy trapezoidal poate fi văzut ca şi cantitatea vagă "*x* este aproximativ în intervalul [*a,b*]".

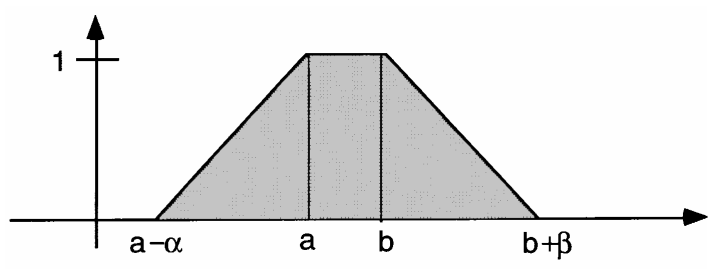

Fig. 3: Număr fuzzy trapezoidal

3 Operații cu mulțimi fuzzy

În această secțiune extindem operațiile clasice din teoria mulțimilor. Să notăm că toate operațiile care sunt extensii ale conceptelor crisp se reduc la semnificația lor uzuală atunci când submulțimile fuzzy au grade de apartenență în mulțimea $\{0,1\}$. Din acest motiv, atunci când extindem operațiile la mulțimi fuzzy, folosim aceleași simboluri ca și în teoria mulțimilor crisp. În cele ce urmează, *A* și *B* sunt două submulțimi fuzzy ale unei aceleiași mulțimi clasice *X*.

Definiția 4: *Spunem că A este o submulțime a lui B dacă* $A(t) \leq B(t)$, *oricare ar fi* $t \in X$.

Definiția 5: *Intersecția lui A și B este definită ca*

$$(A \cap B)(t) = \min\{A(t), B(t)\} = A(t) \wedge B(t)$$

pentru toți $t \in X$.

$A \cap B$ se poate interpreta ca "*x* este apropiat de *a* și *x* este apropiat de *b*".

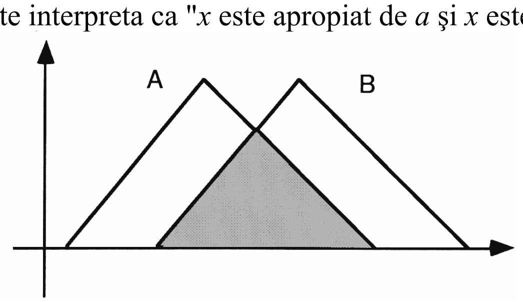

Fig. 4: Intersecția a două numere triunghiulare fuzzy

Definiția 6: *Reuniunea lui A şi B este definită ca*

$$(A \cup B)(t)=max\{A(t),B(t)\}=A(t) \vee B(t)$$

pentru toți $t \in X$.

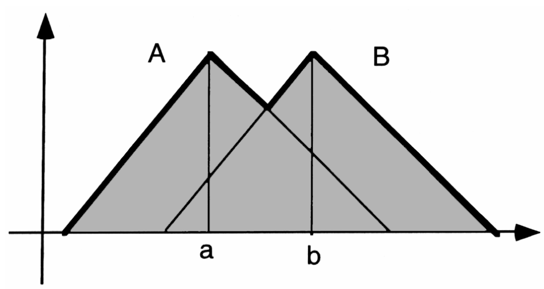

Fig. 5: Reuniunea a două numere triunghiulare fuzzy

Definiția 7: *Complementara mulțimii fuzzy A este definită ca*

$$(\neg A)(t) = 1 - A(t)$$

pentru toți $t \in X$

A se poate interpreta ca "x este apropiat de a", iar $\neg A$ se poate interpreta ca "x nu este apropiat de a" sau "x este depărtat de a".

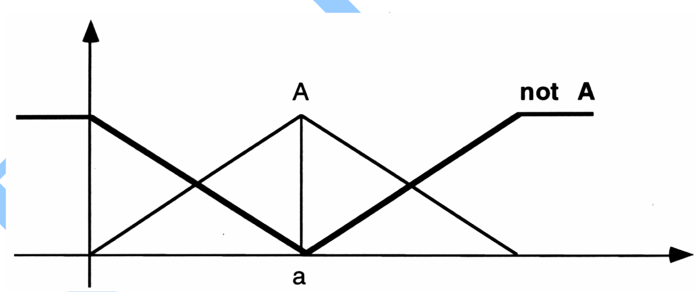

Fig. 6: Mulțimile vagi A şi ¬A

Definiția 8: *Submulțimile fuzzy A şi B se zic egale,* $A=B$, *dacă* $A \subset B$ *şi* $B \subset A$, *adică dacă* $A(t)=B(t)$, *pentru orice* $t \in X$.

Submulțimea fuzzy vidă a lui X este definită ca $\varnothing: X \to [0,1]$, $\varnothing(t)=0$, pentru orice $t \in X$. Se vede că $\varnothing \subset A$ pentru orice submulțime vagă A a lui X.

Submulțimea fuzzy universală a lui X este definită ca

$$1_X: X \rightarrow [0,1],\ 1_X(t)=1, \text{ pentru } t \in X.$$

Se observă că 1_X este cea mai mare submulțime vagă a lui X, $A \subset 1_X$ pentru orice submulțime vagă A a lui X.

Mai mult, $\neg 1_X = \varnothing$ şi $\neg \varnothing = 1_X$. Totuşi, spre deosebire de teoria clasică a mulțimilor, principiul nonconcordanței şi al terțiului exclus nu sunt satisfăcute, adică $A \wedge \neg A \neq \varnothing$, respectiv $A \vee \neg A \neq 1_X$

Legile lui De Morgan sunt satisfăcute de către submulțimile fuzzy ale lui X, adică

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

4 Logica fuzzy şi fundamentarea procesului decizional

Teoria mulțimilor fuzzy a fost dezvoltată de L. Zadeh [Zad75], care a observat că modelele matematice şi diferite metode clasice în fundamentarea procesului decizional prezintă imperfecțiuni şi sunt dificil de aplicat la realitatea complexă a factorilor economici. Pe măsură ce creşte complexitatea unui proces economic se poate ajunge la un punct critic, de la care precizia şi semnificația afirmațiilor referitoare la comportamentul procesului sunt incompatibile. Principiul incompatibilității definit de Zadeh converge spre afirmații vagi (fuzzy), iar logica fuzzy încearcă să creeze un formalism pentru imprecizia şi ambiguitatea specifică limbajului natural.

Iar acest nou limbaj, care să modeleze limbajul natural, a creat un nou tip de model matematic. Raportarea la logica fuzzy se face totdeauna când, pentru un proces decizional, valorile de apartenență asociate sunt în intervalul [0,1].

Adoptarea de decizii superior şi complex fundamentate devine posibilă prin apelarea la o gamă variată de metode şi tehnici decizionale care facilitează alegerea variantei optime, fiecare dintre acestea încadrându-se într-un anumit model decizional. Funcție de volumul, structura şi calitatea informațiilor de care se beneficiază, modelele decizionale pot fi: ***deterministe,*** centrate pe informații cu grad ridicat de precizie, complete; ***nedeterministe*** şi ***probabiliste.*** Utilizarea acestor metode şi tehnici decizionale determină o sporire a gradului de rigurozitate şi, implicit, de eficacitate a deciziilor adoptate, diferențiate în raport de tipologia situațiilor decizionale implicate.

Corespondenta dintre calitatea informațiilor - exprimată prin parametrii precizie şi completitudine - şi modelele decizionale (economice sau economico-matematice) a fost sugestiv reliefată grafic de către unii specialişti ca în fig. 7:

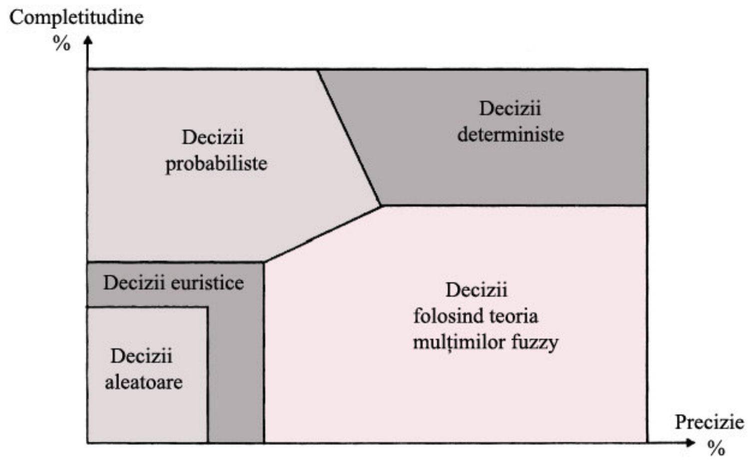

Fig. 7: Precizie şi completitudine în modelele decizionale

Din examinarea graficului rezultă că cele două caracteristici ale informaţiilor (şi nu numai ele) determină utilizarea uneia sau alteia din metodele decizionale pe care teoria managementului le-a pus la dispoziţia practicii economice. Astfel, dacă unui grad redus de precizie şi completitudine îi corespund decizii aleatoare şi euristice, bazate pe intuiţia, raţionamentul şi experienţa decidentului, pe măsură ce informaţiile sunt mai complete şi mai precise, apare posibilitatea utilizării de metode şi tehnici centrate pe proceduri algoritmizate, care permit adoptarea unor decizii cu grad ridicat de fundamentare.

Modelele bazate pe teoria mulţimilor vagi (***fuzzy***), în care informaţiile transmise conducerii pentru fundamentarea deciziilor sunt cu grad ridicat de completitudine, dar puţin precise, modelele probabiliste, utilizate în situaţia existenţei unor informaiii precise, dar mai puţin complete, precum şi modelele deterministe sunt, în opinia noastră, cele mai semnificative.

Alături de acestea există un mare număr de metode şi tehnici, între care menţionăm metode ale cercetării operaţionale, furnizate de programarea matematică, teoria stocurilor, teoria grafurilor, teoria firmelor de aşteptare, teoria jocurilor, simularea decizională, teoria echipamentelor, care pot fi folosite cu succes în practica firmei.

Metodele şi tehnicile decizionale se pot grupa, în funcţie de tipul situaţiilor decizionale implicate, în 3 categorii:

- metode şi tehnici de optimizare a deciziilor în condiţii de certitudine: ELECTRE, metoda utilităţii globale, metoda aditivă, algoritmul lui Deutch-Martin, tabelul decizional, simularea decizională;
- metode şi tehnici de optimizare a deciziilor în condiţii de incertitudine: tehnica optimistă, tehnica pesimistă (A.Wald), tehnica optimalităţii (C.Hurwicz), tehnica proporţionalităţii (Bayes-Laplace), tehnica minimizării regretelor (L.Savage);
- metode şi tehnici de optimizare a deciziilor în condiţii de risc: arborele decizional, metoda speranţei matematice.

Tehnicile de optimizare a deciziilor în condiţii de incertitudine, în care se înscriu şi cele legate de mulţimile fuzzy, prin caracterul lor euristic generează obţinerea unor variante optime diferite. Subliniem că unii specialişti în domeniul managementului recomandă ca utilizarea uneia sau alteia din aceste tehnici să aibă în vedere atât obişnuinţa decidentului de a opera cu o anumită tehnică şi psihologia managerului, cât şi, mai ales, situaţia economico-financiară a firmei respective. Cu cât firma are o situaţie economico-financiară mai bună, cu atât este posibilă asumarea unor riscuri mai mari, deci viziuni mai optimiste asupra probabilităţilor de obţinere a unor rezultate superioare, pentru care există resurse de compensare în caz de eşec.

5 Operatori de medie

Într-un proces de decizie, ideea de compromis corespunde la a vedea evaluarea globală a unei acţiuni ca fiind situată între cea mai rea şi cea mai bună evaluare. Aceasta apare în prezenţa obiectivelor conflictuale, atunci când este permisă o compensaţie între compatibilităţile corespunzătoare.

Operatorii de medie realizează compromisul între obiective, permiţând o compensaţie pozitivă între evaluările lor.

Definiţia 9: *Un operator de medie M este o funcţie*

$$M:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

satisfăcând următoarele proprietăţi:

M1. $M(x,x)=x, \quad \forall x\in[0,1]$ *(idempotenţă)*

M2. $M(x,y)=M(y,x)\ \forall x,y\in[0,1]$ *(comutativitate)*

M3. $M(0,0)=0;\quad M(1,1)=1$ *(condiţii de extrem)*

M4. $M(x,y)\le M(x',y')$, *dacă* $x\le x'$ *şi* $y\le y'$ *(monotonie)*

M5. M este continuă.

Dacă M este un operator de medie, atunci

$$\min\{x,y\} \le M(x,y) \le \max\{x,y\}, \ \forall x \in [0,1]$$

În adevăr, din idempotența şi monotonia lui M rezultă că

$$\min\{x,y\}=M(\min\{x,y\},\min\{x,y\}) \le M(x,y) \quad \text{şi}$$
$$M(x,y) \le M(\max\{x,y\},\max\{x,y\}) = \max\{x,y\}$$

O familie importantă de operatori de medie este dată de către mediile cvasi-aritmetice:

$$M(a_1,a_2,\ldots,a_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)$$

Kolmogorov a caracterizat această familie ca fiind clasa tuturor operatorilor de medie continui şi decompozabili.

Exemple: *Media cvasi-aritmetică a lui a_1 şi a_2 este definită ca*

$$M(a_1,a_2) = f^{-1}\left(\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}\right)$$

Cei mai utilizați operatori de medie sunt:

- *media armonică:* $\dfrac{2xy}{x+y}$
- *media geometrică:* $\sqrt{xy}$
- *media aritmetică:* $\dfrac{x+y}{2}$
- *duala mediei geometrice:* $1-\sqrt{(1-x)(1-y)}$
- *duala mediei armonice:* $\dfrac{x+y-2xy}{2-x-y}$
- *mediana:* $med(x,y,\alpha)=\begin{cases} y, & \text{dacă } x \le y \le \alpha \\ \alpha, & \text{dacă } x \le \alpha \le y \\ x, & \text{dacă } \alpha \le x \le y \end{cases}$
- *p-media generalizată:* $\left[\dfrac{x^p+y^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$

Procesul de agregare a informației apare în multe aplicații legate de dezvoltarea sistemelor inteligente: rețele neuronale, controlori cu logică fuzzy, sisteme pentru viziune, sisteme expert, decizii multi-criteriale, etc.

Bibliografie

[Bai02] **Gh. Băileşteanu** – *Logică economică. Vol.I – Logica diagnosticului*, Ed. Mirton, Timişoara, 2002.

[LD01] **L. Luca, I. Despi** - *Toward a Definition of Fuzzy Processes*, Proceedings of the 5th International Symposium on Economics Informatics, Bucharest, pp. 855-859, May 2001.

[Luc03] **L. Luca** – *Spaţii de procese fuzzy*, Ed. Mirton, Timişoara, 2003.

[NV99] **Ov. Nicolescu, I. Verboncu** – *Management*, Editura Economică, Bucureşti, Ed. a III-a revizuită, 1999.

[TVHB98] **A. Tacu, R. Vancea, Şt. Holban, A. Burciu** – *Inteligenţa artificială. Teorie şi aplicaţii în economie*, Editura Economică, Bucureşti, 1998.