Anale. Seria Informatică. Vol. III fasc. 2 – 2005
Annals. Computer Science Series. 3rd Tome 2nd Fasc. – 2005

Algoritmi de accelerare pentru determinarea drumului optim

Lect.dr.ing. Tiberiu Marius Karnyanszky
Universitatea „Tibiscus" din Timişoara

ABSTRACT: Sunt numeroase aplicațiile teoriei grafurilor în cele mai diverse domenii ale vieții moderne. O mare parte dintre acestea se refera la determinarea drumului optim, care poate fi drumul minim. adică găsirea celui mai scurt sau celui mai ieftin sau celui mai puțin aglomerat drum între două noduri ale unei rețele; varianta drumului maxim semnifică găsirea drumului de lungimea cea mai mare, cu timpul cel mai mare de parcurs etc. Problema vitezei cu care are loc calculul este de multe ori critică, în sensul că, dacă acest calcul este necesar în timp real, trebuie ca determinarea să se facă în cel mai scurt timp. Pentru aceasta se pot aplica diverse procedee şi metode de accelerare, lucrarea de față prezentând una dintre acestea.

1. INTRODUCERE

Problemele de micro- şi macroeconomie, rețelele de distribuire a energiei electrice sau termice, rețelele de transport rutier sau feroviar, elaborarea deciziilor, lingvistica, rețelele de calculatoare, suportul tehnic pentru Internet ş.a.m.d. sunt numai câteva dintre domeniile de aplicabilitate a problemelor de teoria grafurilor ([Kar02. Kar04]).

Printre aplicațiile clasice specifice teoriei grafurilor se găseşte determinarea drumului minim între două vârfuri ale grafului; ceea ce, ca aplicație practică, aceasta ar putea însemna găsirea drumului cel mai scurt între două localități dintr-un sisteml de transport sau a timpului cel mai scurt de livrare a unui mesaj într-o rețea de calculatoare.

Această lucrare prezintă modul în care rezolvarea acestei probleme se poate rezolva într-un timp mai scurt decât algoritmul tradițional.

2. MATERIAL ŞI METODĂ

Cea mai uşor de implementat metodă de determinare a drumului optim (minim, în această prezentare) poartă numele de algoritmul **Bellman–Kalaba** deoarece aparține lui R. Bellman şi R. Kalaba ([Ion73, Kar02, Kar04, Ren94]). Algoritmul de calcul aferent acestei metode, pentru determinarea drumului de lungime minimă de la vârful x_s la vârful x_d, presupune efectuarea următorilor paşi:

Pasul 1. Plecând de la graful cu vârfurile x_1, ..., x_n, (în exemplul analizat, vârfurile sunt reprezentate de localități) se construieşte matricea de adiacență (matricea tranzițiilor) A_m având următoarele valori:

- $a_{ij} = 0$ pentru $i = j$ deoarece se consideră graful fără bucle;
- $a_{ij} > 0$, dacă există arc de la vârful x_i la x_j;
- $a_{ij} = \infty$, dacă nu există arc de la vârful x_i la x_j.

Pasul 2. Acestei matrice i se asociază vectorul coloană v_j care este coloana din A_m corespunzătoare vârfului final x_d:

$$v_j = (v_j)_i,\ i = 1, n,\ (v_j)_i = a_{id},\ i = 1, n \qquad (1)$$

Pasul 3. Din vectorul v_j se construieşte în continuare vectorul $(v_j)^2$ prin înmulțirea matricei A_m cu vectorul v_j:

$$(v_j)^2 = A_m \bullet (v_j) \qquad (2)$$

procedeu care se repetă până când se obține egalitatea $(v_j)^{\lambda+1} = (v_j)^{\lambda}$

Pasul 4. În acest ultim $(v_j)^{\lambda}$ se obține valoarea minimă a drumului de la x_s la x_d ca fiind elementul de pe linia s din vector, adică $(v_j)^{\lambda}_s$

Pasul 5. Pentru a determina care sunt vârfurile (localitățile) vizitate de acest drum se procedează astfel:

- se pleacă de la vârful x_s şi se determină toate diferențele $(v_j)_s^{\lambda}$ - a_{sk}, $k=1,n$; când se atinge egalitatea:

  $$(v_j)_s^{\lambda} - a_{sk} = (v_j)_k^{\lambda} \qquad (3)$$

  atunci vârful k astfel determinat urmează lui x_s în drumul de lungime minimă;
- procedeul se reia cu vârful x_k determinat ca mai sus, până se ajunge la vârful final x_d;

- dacă la un pas există mai multe diferenţe egale cu valoarea lui $(v_j)_k{}^{\lambda}$, toate acestea se reţin şi se caută mai multe drumuri care au aceeaşi lungime minimă.

În algoritmul Bellman-Kalaba, operaţia de înmulţire a două matrice se face după formula:

$$c_{ij} = min\ (a_{i1}+b_{1j},\ a_{i2}+b_{2j},\ \ldots,\ a_{in}+b_{nj}) \tag{4}$$

De exemplu (vezi graful din Fig. 1) determinarea drumului minim de la vârful x_1 la x_6 pleacă de la matricea tranziţiilor din Tabelul 1 şi presupune să se determine valorile minime ale drumurilor ca în Tabelul 2:

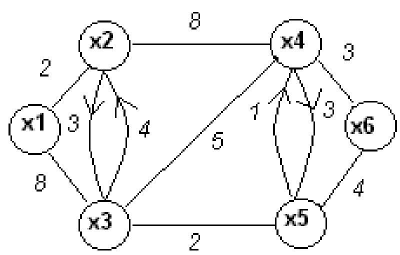

Fig.1. Graf pentru determinarea drumului de lungime minimă

Tabelul 1. Matricea de adiacenţă asociată grafului din Fig. 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	2	8	∞	∞	∞	x_1
2	0	3	8	∞	∞	x_2
8	4	0	5	2	∞	x_3
∞	8	5	0	3	3	x_4
∞	∞	2	1	0	4	x_5
∞	∞	∞	3	4	0	x_6

Tabelul 2. Etapele de calcul al valorii drumului minim

$(v_j)^1$	$(v_j)^2$	$(v_j)^3$	$(v_j)^4$	$(v_j)^5$
∞	∞	13	11	11
∞	11	9	9	9
∞	6	6	6	6
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
0	0	0	0	0

de unde, mai apoi, conform pasului 5 al algoritmului, se determină componenţa drumului minim ca fiind (x_1, x_2, x_3, x_5, x_6).

În mod asemănător, pentru drumul optim de la x_1 la x_{10} în graful din Fig. 2 se porneşte de la matricea de adiacenţă din Tabelul 3 şi se obţin valorile din Tabelul 4, în baza cărora se determină drumul minim (x_1, x_3, x_4, x_6, x_8, x_9, x_{10}):

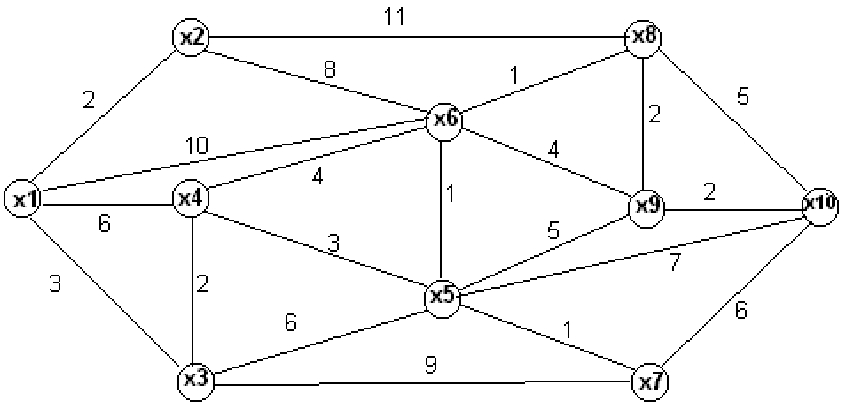

Fig.2. Graf pentru determinarea drumului de lungime minimă

Tabelul 3. Matricea de adiacență asociată grafului din Fig. 2

x_1	x_2	x_3	x_4	X_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
0	2	3	6	∞	10	∞	∞	∞	∞	x_1
2	0	∞	∞	∞	8	∞	11	∞	∞	x_2
3	∞	0	2	6	∞	9	∞	∞	∞	x_3
6	∞	2	0	3	4	∞	∞	∞	∞	x_4
∞	∞	6	3	0	1	1	∞	5	7	x_5
10	8	∞	4	1	0	∞	1	4	∞	x_6
∞	∞	9	∞	1	∞	0	∞	∞	6	x_7
∞	11	∞	∞	∞	1	∞	0	2	5	x_8
∞	∞	∞	∞	5	4	∞	2	0	2	x_9
∞	∞	∞	∞	7	∞	6	5	2	0	x_{10}

Tabelul 4. Etapele de calcul al valorii drumului minim

$(v_j)^1$	$(v_j)^2$	$(v_j)^3$	$(v_j)^4$	$(v_j)^5$	$(v_j)^6$	$(v_j)^7$
∞	∞	16	15	15	14	14
∞	16	14	13	13	13	13
∞	13	12	12	11	11	11
∞	10	10	9	9	9	9
7	7	7	6	6	6	6
∞	6	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	5	5
5	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0

O modificare a algoritmului de calcul care permite accelerarea vitezei poate fo făcută în cursul operației de înmulțire a matricei A_m cu vectorul coloană $(v_j)^k$, în sensul ca aceasta să nu se mai facă în ordinea de la prima la ultima linie, ci de la ultima la prima linie, cu luarea în calcul, pe măsură ce are loc parcurgerea liniilor, nu a valorilor de la pasul anterior ci a celor recent obținute:

Pasul 3.

a) Se copiază elementele vectorului de la pasul anterior în valorile de la pasul curent:

$$(v_j)^2 = (v_j) \tag{5}$$

b) Din vectorul $\boldsymbol{v_j}$ se construieşte în continuare vectorul $\boldsymbol{(v_j)^2}$ prin înmulțirea matricei $\boldsymbol{A_m}$ cu vectorul $\boldsymbol{(v_j)^2}$:

$$(v_j)^2 = A_m \bullet (v_j)^2 \tag{6}$$

procedeu care se repetă până când se obține egalitatea $\boldsymbol{(v_j)^{\lambda+1} = (v_j)^{\lambda}}$

Aplicând acest artificiu de calcul pentru exemplele din Fig. 1 şi 2, etapele de calcul sunt cele din Tabelele 5 şi 6:

Tabelul 4. Etapele de calcul al valorii drumului minim pentru graful din Fig. 1

$(v_j)^1$	$(v_j)^2$	$(v_j)^3$
∞	11	11
∞	9	9
∞	6	6
3	3	3
4	4	4
0	0	0

Tabelul 4. Etapele de calcul al valorii drumului minim pentru graful din Fig. 2

$(v_j)^1$	$(v_j)^2$	$(v_j)^3$
∞	14	14
∞	13	13
∞	11	11
∞	9	9
7	6	6
∞	5	5
6	6	6
5	4	4
2	2	2
0	0	0

23. REZULTATE

Aşadar, determinarea drumului optim în cele două cazuri a necesitat parcurgerea a 5 respectiv 7 etape, dacă se utilizează algoritmul clasic, față de 3 respectiv 3 etapă cu algoritmul modificat.

4. DISCUȚII

Aşadar, acest scurt exemplu de calcul, verificat în practică pe mai multe exemple de grafuri, generate aleator, demonstrează care sunt avantajele utilizării algoritmului modificat de calcul, în anumite probleme specifice de algoritmica grafurilor, algoritm care permite reducerea semnificativă a timpului de determinare a valorii drumului optim.

BIBLIOGRAFIE

[Ion73] **T. Ionescu** - *Grafuri. Aplicații, vol. I şi II*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973

[Kar02] **T. M. Karnyanszky** - *Algoritmica grafurilor*, Editura Mirton, Timişoara, 2002

[Kar04] **T. M. Karnyanszky** - *Algoritmica grafurilor, ediția a II-a*, Editura Mirton, Timişoara, 2004

[Ren94] **D. Rendi** – *Capitole de matematic speciale. Curs pentru uzul studenților. Partea a II-a. Teoria grafurilor şi elemente de teoria automatelor finite*, Universitatea Tehnica din Timişoara, 1994