Algoritmul de relaxare Agmon-Motzkin-Schoenberg

Prof.dr. Ştefan Măruşter
Universitatea de Vest din Timişoara
Student Ioan Anton
Universitatea "Tibiscus" din Timişoara

ABSTRACT. The Agmon-Motzkin-Schoenberg relaxation algorithm is considered for a linear system of equations in two dimensions. The central point of the paper is a programm which allow the visualization of succesive steps of algorithm. Also this program gives the posibility to investigate some properties of the algorithm concerning the rate of convergence, the study of relaxation parameter, and others, and the investigation of the improvement of algorithm.

1 Introducere

Algoritmul de relaxare Agmon-Motzkin-Schoenberg a fost conceput inițial pentru determinarea unei soluții a unui sistem de inecuații liniare. Această problemă apare la programarea liniară, în legătură cu determinarea unei soluții de bază, sau la calculul polinoamelor de cea mai bună aproximare în sensul lui Cebâşev. Ulterior, această metodă a fost extinsă la un sistem oarecare de mulțimi convexe şi închise din R^n sau dintr-un spațiu Hilbert real.

Toate considerațiile din această lucrare au fost făcute în spații reale finit dimensionale, dar acestea se pot transpune fără nici o modificare în spații Hilbert reale.

În cazul unui sistem de inecuații liniare de forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m,$$

presupus compatibil, algoritmul constă în construcţia unui şir $\{x^k\} \subset R^n$ prin proiecţii succesive pe anumite hiperplane determinate de inecuaţiile sistemului, şir care converge întotdeauna la o soluţie a sistemului. Să observăm că fiecare hiperplan H_i, determinat de aceste inecuaţii, este o mulţime închisă şi convexă din R^n, iar mulţimea soluţiilor sistemului coincide cu $\bigcap_{i=1}^{m} H_i$. Prin urmare, problema admite următoarea formulare mai generală: fiind date m mulţimi închise şi convexe din R^n, M_i, $i = 1,\ldots,m$, cu intersecţie nevidă, să se determine un punct din $\bigcap_{i=1}^{m} M_i$.

2 Descrierea şi convergenţa algoritmului

Fie M_i, $i = 1,\ldots,m$, m mulţimi închise şi convexe din R^n cu intersecţie nevidă. Pentru orice punct $x \in R^n$ vom nota cu $P(x,i)$ proiecţia lui x pe mulţimea M_i şi fie i_x cel mai mic indice pentru care

$$\|x - P(x,i_x)\| = \max_i \|x - P(x,i)\|$$

Fie operatorul $T : R^n \to R^n$ definit de $Tx = P(x,i_x)$. Se vede uşor că $x \in \bigcap_i M_i$, dacă şi numai dacă x este punct fix al lui T. Cu alte cuvinte, $F(T) = \bigcap_i M_i$.

Fie $\lambda \in (0,2)$ şi fie $T_\lambda = I - \lambda(I - T)$, unde I este operatorul identitate de la R^n în R^n. Evident, $F(T_\lambda) = F(T)$. Algoritmul Agmon-Motzkin-Schoenberg se obţine foarte simplu luând pe T_λ ca funcţie de iteraţie. Convergenţa lui este dată de următoarea:

Teoremă *Fie* M_i, $i = 1,\ldots,m$, *o familie de mulţimi închise şi convexe din* R^n *astfel încât* Int $\bigcap_i M_i$ *este o mulţime nevidă şi mărginită. Atunci şirul* $\{x^k\}$ *dat de* $x^k = T_\lambda^k x^0$ *converge la un punct din* $\bigcap_i M_i$ *pentru orice* $x^0 \in R^n$.

3 Descrierea programului

Programul a fost scris în limbajul C cu utilizarea interfeței de programare a aplicațiilor API.

Datele de intrare necesare pentru derularea programului sunt:

- O mulțime de seturi de numere reprezentând coeficienții unor inecuații de gradul 1 de forma ax + by + c > 0. Aceste inecuații descriu mulțimi de puncte în spațiul bidimensional. Introducerea acestor valori se face prin apăsarea butonului ADD. Pentru modificarea unui set de numere sau renunțarea la unul din acestea, se selectează numărul de ordine al setului în cauză şi se apasă butonul MODIFY, respectiv REMOVE.
- Un punct de start pe suprafața de lucru, selectat cu ajutorul mouse-ului.

După introducerea acestor date, există următoarele posibilități:

- Se acționează cursorul controlului SPEED CONTROL. Aceasta permite reducerea vitezei de execuție a programului, până la limita de o iterație pe secundă.
- Se selectează opțiunea STEP-BY-STEP. Aceasta permite vizualizarea fiecărei iterații. După fiecare iterație este necesară apăsarea butonului START.
- Se selectează opțiunea ADJUST ENDING POINT. Această opțiune permite selectarea unui coeficient cuprins între 0.0 – 1.0, care va fi utilizat în calculul coordonatelor punctului următor celui curent. Valoarea implicită este 1.0. Utilizarea acestei opțiuni contribuie la îmbunătățirea ratei de convergență a algoritmului.
- Se apasă butonul START. Programul se va executa şi va afişa punctul de start, punctul final (un punct aparținând intersecției mulțimilor) şi numărul de iterații necesar pentru atingerea acestui punct.

La fiecare iterație, se analizează apartenența punctului de start (notat cu X) la mulțimile avute în studiu. Dacă punctul nu aparține mulțimii *i*, simetricul punctului de start (notat cu Y) în raport cu mulțimea *i* va deveni noul punct de start.

În cazul folosirii unui coeficient de ajustare mai mic decât 1.0, noul punct de start va fi situat în intervalul [(X + Y) / 2, Y). Procesul se repetă până când va fi găsit un punct care să satisfacă toate inecuațiile care descriu mulțimile.

Bibliografie

[BB91] **D. Borwein** and **J. Borwein,** *Fixed point iterations for real functions*, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991), 112 – 126.

[BB96] **H. Bauschke** and **J. M. Borwein,** *On projection algorithms for solving convex feasibility problems*, SIAM Rev. 38 (1996), 367 – 426.

[BC01] **H. H. Bauschke** and **P. L. Combettes,** *A week-to-strong convergence principle for Fejer-monotone methods in Hilbert spaces*, Math. Oper. Res. 26 (2001), 248 – 264.

[CP02] **P. L. Combettes** and **T. Pennanen,** *Generalized Mann iterates for constructing fixed points in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., vol. 175, No. 2 (2002), 521 – 536.

[Dot70] **W. G. Dotson,** *On the Mann iterative process*, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 65 – 73.

[Mar77] **Şt. Măruşter,** *The solution by iteration of nonlinear equations in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1977), 69 – 73.

[Mar81] **Şt. Măruşter,** *Metode numerice în rezolvarea ecuaţiilor neliniare,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1981