# Asupra claselor de t-norme și a relațiilor dintre ele

**Conf.dr. Lucian Luca, Asist. Adela Ionescu,**
Universitatea „Tibiscus" Timişoara
**Mat.ec. Sorina-Carmen Luca**
Frankfurt-Bukarest Bank AG.

**ABSTRACT.** The paper presents a few aspects regarding the t-norms in the fuzzy set theory. After reviewing the algebrical properties for the t-norms, there are presented the relations between these properties as well as the relations between the most important of t-norms classes and the last results in the domain.



## 1 Introducere

Principala idee care a stat la baza teoriei mulțimilor fuzzy a fost de a înlocui valorile booleene de adevăr {0,1} cu o mulțime mai mare, de obicei [0,1]. Atunci când se încearcă generalizarea conectorilor booleeni conjuncție şi disjuncție la acest caz, în literatură se începe cu norme, respectiv conorme, triunghiulare [Kle81]. Normele triunghiulare au fost studiate prima dată în contextul spațiilor metrice probabiliste [Sch+83] pentru a formula inegalitatea triunghiului, de unde şi numele inițial. Conormele triunghiulare sunt conceptul dual.

**Definiția 1.1** *O **normă triunghiulară (t-normă)** este o funcție*

$$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

*astfel încât pentru orice* $x,y,z \in [0,1]$:

- ***T1***. *T este asociativă:* $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$
- ***T2.*** *T este comutativă:* $T(x,y)=T(y,x)$
- ***T3.*** *T este nedescrescătoare pe a doua componentă:* $T(x,y) \leq T(x,z)$, *dacă* $y \leq z$

***T4***. *T are pe* 1 *ca element neutru: $T(x,1)=x$*
*O t-normă T este* ***arhimediană*** *dacă:*
***T5.*** *T este continuă*
***T6.*** $T(x,x) < x, \ \forall x \in (0,1)$
*O t-normă arhimediană T este* ***strictă*** *dacă:*
***T7.*** $T(x',y') < T(x,y)$, *dacă* $x' < x$ *şi* $y' < y$, $\forall x,x',y,y' \in (0,1)$. ■

**Definiția 1.2** *O* ***conormă triunghiulară (t-conormă)*** *este o funcție*

$$S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

*astfel încât pentru orice* $x,y,z \in [0,1]$:
***S1***. *S este asociativă: $S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)$*
***S2.*** *S este comutativă: $S(x,y)=S(y,x)$*
***S3***. *S este nedescrescătoare pe a doua componentă: $S(x,y) \leq S(x,z)$, dacă $y \leq z$*
***S4.*** *S are pe* 0 *ca element neutru: $S(x,0)=x$*
*O t-conormă S este* ***arhimediană*** *dacă:*
***S5***. *S este continuă*
***S6.*** $S(x,x) > x, \ \forall x \in (0,1)$
*O t-conormă arhimediană S este* ***strictă*** *dacă:*
***S7.*** $S(x',y') < S(x,y)$, *dacă* $x' < x$ *şi* $y' < y$, $\forall x,x',y,y' \in (0,1)$. ■

Dacă *T* este o t-normă, atunci t-conorma sa duală este dată de

$$S(x,y) = 1 - T(1-x,1-y)$$

Este evident că orice t-normă *T* este de asemenea nedescrescătoare pe prima sa componentă şi că satisface şi proprietatea $T(x,0) = 0$, precum şi că orice t-conormă este descrescătoare pe prima sa componentă şi că satisface şi

$$S(x,1) = 1 - T(1-x,1-1) = 1 - T(1-x,0) = 1 - 0 = 1$$

Exemplele clasice din literatură pentru t-norme şi t-conorme sunt următoarele:

$T_{min}(a,b) = min\{a,b\}$ $\qquad$ $S_{max}(a,b) = max\{a,b\}$

$T_{Luk}(a,b) = max\{a+b-1,0\}$ $\qquad$ $S_{Luk}(a,b) = min\{a+b,1\}$

$T_{prob}(a,b) = ab$ $\qquad$ $S_{prob}(a,b) = a + b - ab$

$$T_{Ham}^{\gamma} = \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)} \qquad S_{Ham}^{\gamma} = \frac{a+b-(2-\gamma)ab}{1+(1-\gamma)ab}$$

$$T_{weak} = \begin{cases} min\{a,b\}, \text{ dacă } max\{a,b\} = 1 \\ 0, \quad \text{altfel} \end{cases}$$

$$S_{strong} = \begin{cases} max\{a,b\}, \text{ dacă } min\{a,b\} = 0 \\ 1, \quad altfel \end{cases}$$

unde am folosit următoarele prescurtări: Luk=Lukasiewicz, Ham=Hamacher, prob=probabilistic.

Normele triunghiulare se folosesc pentru a modela conectorul logic AND, iar conormele triunghiulare se folosesc pentru a modela conectorul logic OR, în teoria mulţimilor fuzzy. Ele se pot extinde, prin asociativitate, la $n > 2$ argumente. De exemplu

$$T_{prob}(a_1,a_2, \ldots ,a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$$T_{Luk}(a_1,a_2, \ldots ,a_n) = max\{\sum_{i=1}^{n} a_i - n + 1, 0\}$$

Ca o consecinţă imediată a comutativităţii, monotoniei şi elementului neutru 1, $T_{min}$ este cea mai mare, iar $T_{weak}$ este cea mai mică dintre toate t-normele:

$$T_{weak}(a,b) \le T(a,b) \le Tmin(a,b), \quad \forall a,b \in [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} T(x,y) \le T(x,1) = x \le x \parallel \\ T(x,y) = T(y,x) \le T(y,1) = y \le y \end{array}\right\} \rightarrow T(x,y) \le min\{x,y\}$$

Dacă $a \ne 1$ şi $b \ne 1$: $T_{weak}(a,b) = 0 \le T(a,b)$

Dacă $b = 1$, $max\{a,b\} = 1$, $T_{weak}(a,b) = min\{a,b\} = a \le a = T(a,1)$
Analog,

$$S_{max}(a,b) \le S(a,b) \le S_{strong}(a,b), \ \forall a,b \in [0,1].$$

Operaţia de intersecţie se poate defini cu ajutorul t-normelor.

**Definiţia 1.3** *Fie T o t-normă şi A şi B două mulţimi fuzzy. T-intersecţia lui A cu B este definită ca:*

$$(A \cap B)(t) = T(A(t),B(t)), \quad \forall t \in X \ \blacksquare$$

**Exemplul 1.4** *Fie* $T = T_{prob}(a,b) = ab$ *t-norma produs (probabilistică). Atunci:*

$$(A \cap B)(t)=A(t) \cdot B(t), \quad \forall t \in X$$

*Dacă* $A,B$: $[-1,1] \rightarrow [0,1]$, $A(t) = B(t) = 1-|t|$, $\forall t \in [0,1]$ ■

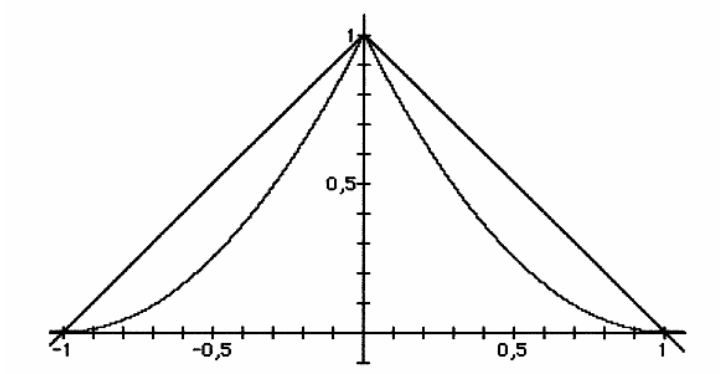


**Figura 1.1. T-intersecția a două mulțimi fuzzy**

Reuniunea a două mulțimi fuzzy se poate defini cu ajutorul t-conormelor.

**Definiția 1.5** *Fie S o t-conormă şi A şi B două mulțimi fuzzy. S-reuniunea lui A cu B este definită ca:*

$$(A \cup B)(t) = S(A(t),B(t)),\ \forall t \in X \quad \blacksquare$$

**Exemplul 1.6** Fie $S = S_{prob}(a,b) = a + b - ab$ t-conorma probabilistică. Atunci:

$$(A \cup B)(t) = A(t) + B(t) - A(t)\cdot B(t), \quad \forall t \in \mathrm{X}$$

Dacă $A,B$: $[-1,1] \to [0,1]$, $A(t) = B(t) = 1-|t|$, $\forall t \in [0,1]$ $\blacksquare$

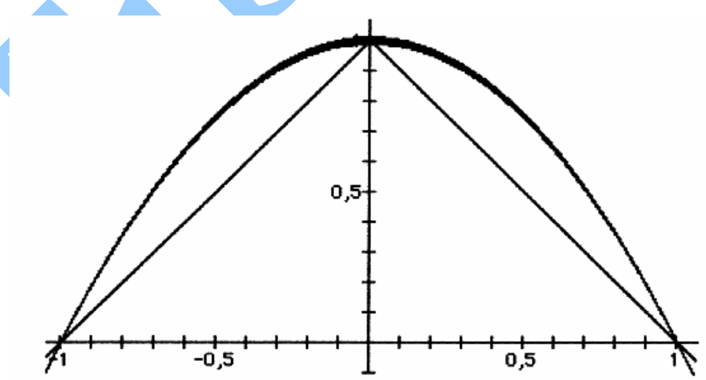


**Figura 1.2. S-reuniunea a două mulțimi fuzzy**

## 2 Proprietăți algebrice ale t-normelor

Din punct de vedere algebric, t-normele sunt semigrupuri speciale pe intervalul unitate [0,1] [Sch+83]. Un astfel de semigrup poate avea proprietăți adiționale, care vor conferi un comportament foarte specific t-normei. Dacă $x \in [0,1]$ şi $n \in N$, termenul $x_T^{(n)}$ se defineşte ca

$$x_T^{(n)} = \begin{cases} x, & \text{dacă } n = 1 \\ T(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n\ ori}), & \text{dacă } n > 1 \end{cases}$$

Primul grup de proprietăți algebrice interesante ale unei t-norme T constă din:

1. ***Monotonie strictă***: $T$ se zice strict monotonă dacă $y < z$ implică întotdeauna $T(x,y) < T(x,z)$
2. ***Legea anulării***: $T$ satisface legea anulării dacă $T(x,y) = T(x,z)$ şi $x > 0$ implică întotdeauna $y = z$
3. ***Stricteţe***: $T$ se numeşte strictă dacă $T$ este continuă şi strict monotonă
4. ***Proprietatea arhimediană***: $T$ se numeşte arhimediană dacă pentru orice pereche $(x,y) \in (0,1)^2$ există un $n \in N$ astfel încât $x_T^{(n)} < y$
5. ***Proprietatea limitei***: $T$ satisface proprietatea limitei dacă pentru orice $x \in (0,1)$ avem $\lim_{x \to \infty} x_T^{(n)} = 0$
6. ***Proprietatea diagonalei***: $T$ satisface proprietatea diagonalei dacă pentru toţi $x \in (0,1)$ avem $T(x,x) < x$

Un prim rezultat al prezentei lucrări îl constituie figura 2.1, în care sunt vizualizate relațiile dintre aceste proprietăți

Există în literatura de specialitate exemple care arată că alte implicații nu mai au loc: minimum ($T_{min}$) este continuă dar nu este arhimediană. Mai mult, $T_{min}$ nu satisface nici legea anulării şi nici proprietatea diagonalei. Cea mai slabă t-normă, $T_{weak}$, satisface proprietatea diagonalei şi este arhimediană, dar nu este continuă şi nici nu satisface legea anulării.

**Exemplul 2.1** *Următoarea t-normă T nu este continuă, satisface proprietatea diagonalei, dar nu satisface legea anulării şi nici proprietatea arhimediană:*

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } (x,y) \in [0,0.5] \\ 2(x-0.5)(y-0.5)+0.5 & , \text{ dacă } (x,z) = (0.5,1]^2 \\ min(x,y) & , \text{ altfel} \end{cases} \quad \blacksquare$$

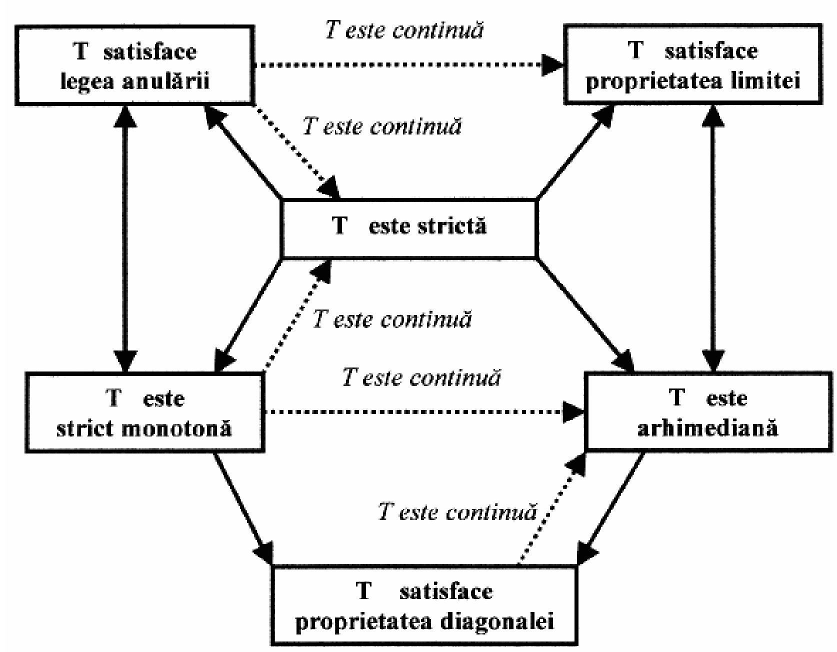


**Figura 2.1. Relațiile dintre diferitele proprietăți algebrice ale t-normelor**

Alte exemple arată că pentru t-normele non-continue nu există nici o relație între proprietatea arhimediană şi legea anulării.

Alte proprietăți importante ale unei t-norme T se leagă de nilpotență şi de existența divizorilor lui zero:

1. Un număr $x \in (0,1)$ se zice element nilpotent al lui $T$ dacă există un n $\in$ N astfel încât $x_T^{(n)} = 0$.
2. O t-normă $T$ se zice nilpotentă dacă ea este continuă şi dacă fiecare $x \in (0,1)$ este un element nilpotent al lui $T$.
3. Un număr $x \in (0,1)$ se zice divizor al lui zero al lui $T$ dacă există un $y \in (0,1)$ astfel încât $T(x,y) = 0$

Este evident că mulțimea elementelor nilpotente ale unei t-norme $T$ este vidă (de exemplu, pentru $T_{min}$) sau este un interval de forma $(0,c)$ sau $(0,c]$.

O t-normă pentru care fiecare element din (0,1) este un element nilpotent este întotdeauna arhimediană, dar nu necesar continuă (contraexemplu: $T_{weak}$).

Dacă $T$ nu are divizori ai lui zero, atunci $T(x,x) > 0$, pentru orice $x \in (0,1]$. Fiecare element nilpotent al lui $T$ este un divizor al lui zero al lui $T$, dar nu şi invers. De exemplu:

$$T(x,y) = \begin{cases} min(x,y), & dacă \quad x+y>1 \\ 0, & altfel \end{cases}$$

fiecare element din (0,1) este un divizor al lui zero însă mulțimea elementelor nilpotente ale lui $T$ este (0,0.5].

Ca şi consecință, pentru o t-normă continuă şi arhimediană următoarele propoziții sunt echivalente:

i) $T$ este nilpotentă;
ii) $T$ are cel puțin un element nilpotent;
iii) $T$ are cel puțin un divizor al lui zero;
iv) $T$ nu este strictă;
v) $T$ nu satisface legea anulării.

Aceasta înseamnă că o t-normă arhimediană $T$ este strictă dacă şi numai dacă pentru fiecare $x \in (0,1)$ secvența $x_T^{(n)}$ este strict descrescătoare şi converge la 0.

În figura 2.2 prezentăm un al rezultat al acestei lucrări: relațiile dintre diferite clasele de t-norme prezentate mai sus.



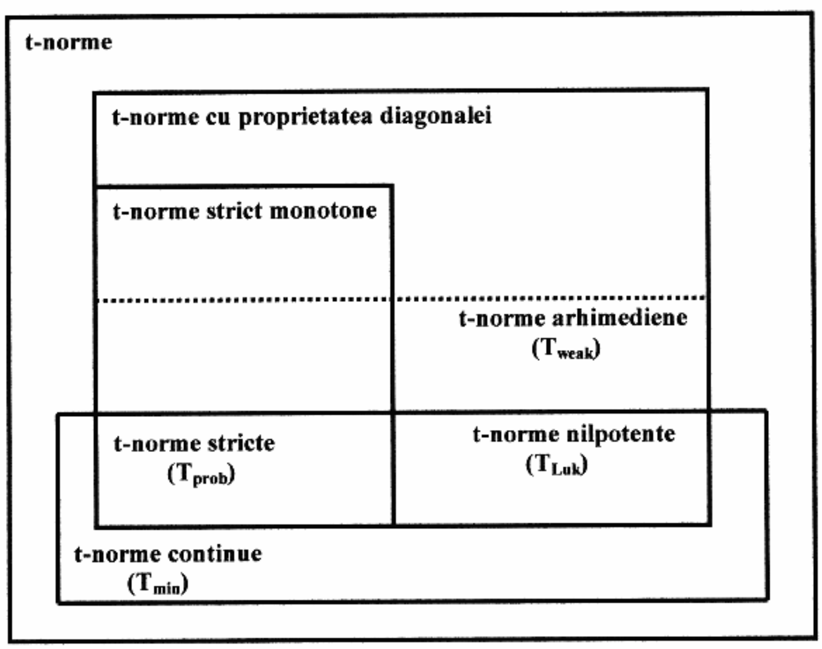


**Figura 2.2. Diferite clase de t-norme şi relațiile dintre ele**

## 3 Operatori de medie. Discuție

Într-un proces de decizie, ideea de compromis corespunde la a vedea evaluarea globală a unei acțiuni ca fiind situată între cea mai rea şi cea mai bună evaluare. Aceasta apare în prezența obiectivelor conflictuale, atunci cînd este permisă o compensație între compatibilitățile corespunzătoare.

Operatorii de medie realizează compromisul între obiective, permițând o compensație pozitivă între evaluările lor.

**Definiția 3.1** *Un operator de medie M este o funcție*

$$M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

*satisfăcând următoarele proprietăți*:

- ***M1.*** $M(x,x) = x,\ \forall x \in [0,1]$ *(idempotență)*
- ***M2.*** $M(x,y] = M(y,x),\ \forall x,y \in [0,1]$ *(comutativitate)*
- ***M3.*** $M(0,0) = 0$; $M(1,1) = 1$ *(condiții de extrem)*
- ***M4.*** $M(x,y) \le M(x',y')$, dacă $x \le x'$ şi $y \le y'$ *(monotonie)*
- ***M5.*** $M$ este continuă ■

Dacă $M$ este un operator de medie, atunci

$$min\{x,y\} \le M(x,y) \le max\{x,y\},\ \forall x,y \in [0,1]$$

În adevăr, din idempotența şi monotonia lui $M$ rezultă că

$$min\{x,y\} = M(min\{x,y\},min\{x,y\}) \le M(x,y)$$

şi $$M(x,y) \le M(max\{x,y\},max\{x,y\}) = max\{x,y\}$$

O familie importantă de operatori de medie este dată de către mediile cvasi-aritmetice:

$$M(a_1,a_2,\ldots,a_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)$$

Kolmogorov a caracterizat această familie ca fiind clasa tuturor operatorilor de medie continui şi decompozabili.

**Exemplul 3.2** *Media cvasi-aritmetică a lui $a_1$ şi $a_2$ este definită ca*

$$M(a_1,a_2) = f^{-1}\left[\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}\right]$$

*Cei mai utilizați operatori de medie sunt:*

- *media armonică*: $\dfrac{2xy}{x+y}$
- *media geometrică*: $\sqrt{xy}$

- *media aritmetică*: $\dfrac{x+y}{2}$
- *duala mediei geometrice*: $1-\sqrt{(1-x)(1-y)}$
- *duala mediei armonice*: $\dfrac{x=y-2xy}{2-x-y}$
- *mediana*: $med(x,y,\alpha)=\begin{cases} y & , \text{ dacă } \quad x \le y \le \alpha \\ \alpha & , \text{ dacă } \quad x \le \alpha \le y \\ x & , \text{ dacă } \quad \alpha \le x \le y \end{cases}$
- *p-media generalizată*: $\left[\dfrac{x^p+y^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \ge 1$ ■

Procesul de agregare a informației apare în multe aplicații legate de dezvoltarea sistemelor inteligente: rețele neuronale, controlori cu logică fuzzy, sisteme pentru viziune, sisteme expert, decizii multi-criteriale, etc. T-normele, t-conormele şi negațiile se pot folosi pentru a reprezenta cunoştințele nesigure.

O idee interesantă apare în [Ian97]. Pentru fiecare propoziție *s*, se consideră gradul său de încredere, $b(s) \in [0,1]$. Dacă se folosesc t-norme (t-conorme) pentru a combina informații cu grade de încredere mari (mici), în general se obțin rezultate care sunt contrare realității. Astfel, se ilustrează combinarea a $n$ factori ($n$ = 5,10,...,20) având acelaşi grad de încredere *d*. De exemplu, pentru t-norma $T(x,y) = xy$, $d = 0.9$ şi $n = 20$ se obține 0.12157665459, în loc de 0.9. Iancu propune ca plecând de la o t-normă (t-conormă) dată, să se obțină o nouă t-normă (t-conormă), care să dea rezultatele în concordanță cu realitatea, dacă ea este folosită pentru a combina informații cu grad de încredere mare (mic). Se obțin următorii operatori cu pragul $a \in (0,1)$ [LL03]:

*t-normă*:

$$T_a(x,y)=\begin{cases} \frac{a}{1-a}T(\frac{1-a}{a}x,\frac{1-a}{a}y) & , \text{dacă } x \le a \text{ şi } y \le a \\ min(x,y) & , \text{dacă } x > a \text{ şi } y > a \end{cases}$$

*t-norma corespunzătoare t-normei* $T_a$

$$S_a(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & , \text{dacă } x \ge a \text{ şi } y \ge a \\ max(x,y) & , \text{dacă } x < a \text{ şi } y < a \end{cases}$$

*unde S este t-conorma corespunzătoare t-normei T,*
*sau generalizare Iancu*:

$$T_a(x,y)=\begin{cases}\frac{a(1-a)xy}{2a^2+3a^2x+2a^2y-ax-ay+xy(6a^2-5a+1)} & \text{, dacă } x\le a \text{ şi } y\le a\\ min(x,y) & \text{, dacă } x>a \text{ şi } y>a\end{cases}$$

$$S_a(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y+2xy}{1+3xy} & \text{, dacă } x\ge a \text{ şi } y\ge a\\ max(x,y) & \text{, dacă } x<a \text{ şi } y<a\end{cases}$$

Generalizarea lui Iancu şi alte rezultate similare, vor face obiectul unei viitoare lucrări a autorilor, cu exemplificări din managementul firmei.

## Bibliografie

[Ian97] **I., Iancu** - *T-normes with threshold*, Fuzzy Sets and Systems 85:83-92, 1997.

[Kle81] **E. P. Klement** - *Operations on fuzzy numbers related to triungular norms*, Proceedings 11th Intl.Symp. on Multiple-Valued Logic. Norman, IEEE, pp. 218-225, NY 1981

[Kle97] **E. P. Klement** - *Some mathematical aspects of fuzzy sets: Triungular norms, fuzzy logic and generalized measures*, Fuzzy Sets and Systems, 90:133-140, 1997.

[LL03] **L. Luca** – *Spaţii de procese fuzzy*, Ed. Mirton, Timişoara, 2003.

[Sch+83] **B. Schweizer and A. Sklar** - *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam, NL, 1983